INSTITUT d'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL

Jean-Jacques Greffet,
Benjamin Vest

TD n°6

Condensation de Bose-Einstein

Ce sujet est inspiré d'un sujet d'examen proposé par E. Brézin, B. Duplantier, J.-M. Gérard sur l'expérience de condensation de Bose-Einstein réalisée par E. Cornell (prix Nobel 2001) et ses collaborateurs.

La condensation de Bose-Einstein est un phénomène quantique macroscopique, responsable indirectement de la superfluidité de l'hélium à basse température. Cependant, ce n'est qu'en 1995 que cette transition a pu être observée directement, dans une première expérience réalisée à l'Université du Colorado par E. Cornell et ses collaborateurs (prix Nobel 2001). Dans les expériences, des atomes alcalins, dont le nombre va de quelques milliers à un million, sont « piégés » par un champ magnétique qui crée une force de rappel proportionnelle à la distance au centre du piège. La transition de Bose-Einstein n'apparaît qu'à des températures très basses, de l'ordre de 10^{-7} K. Nous allons retrouver ce chiffre.

On considère un ensemble d'atomes pouvant être piégés dans un potentiel harmonique à 3 dimensions. Autrement dit, un atome piégé est soumis à une force de rappel, proportionnelle à sa distance au centre du piège. Pour cet atome, le hamiltonien correspondant est donc celui d'un oscillateur harmonique à 3 dimensions. Les atomes piégés n'interagissent pas. Leur spin est nul, ce sont donc des bosons.

On appelle $I_2(\alpha)$ l'intégrale suivante, définie pour $\alpha \leq 0$:

$$I_2(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(x-\alpha)-1} \mathrm{d}x$$

On donne $I_2(0) \approx 2,404$.

1) Rappeler quels sont les niveaux d'énergie du hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension. En déduire que les niveaux d'énergie du hamiltonien à 3 dimensions sont de la forme :

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2}\right)$$

où n est un entier positif ou nul. Montrer que la dégénerescence g_n des états propres d'énergie E_n est égale à $(n+1)(n+2)/2$.

2) Les bosons piégés sont à l'équilibre grand-canonique caractérisé par la température T et le potentiel chimique μ. On note $\alpha = \beta\mu$. Exprimer le grand potentiel $A(\alpha, \beta)$ sous la forme d'une série. Quelle condition cela impose-t-il à α ?

3) Montrer que le nombre moyen $\overline{N}$ d'atomes piégés est donné par :

$$\overline{N} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_n}{\exp(\beta\hbar\omega n - \alpha') - 1} \tag{1}$$

où l'on a posé $\alpha' = \alpha - \frac{3}{2}\beta\hbar\omega$. Dans la suite, on appellera $\gamma = \beta\hbar\omega$

4) On se place dans un domaine de températures grandes par rapport à l'écart entre deux niveaux d'énergie. Dans cette limite, une série telle que celle donnant $\overline{N}$ peut être remplacée par une intégrale sur la variable quasi-continue $\epsilon = \hbar\omega n$. Déduire de la dégénérescence g_n une densité d'état $g(\epsilon)$. Montrer en particulier que dans le cas $\epsilon \gg \hbar\omega$, on a :

$$g(\epsilon) \approx \frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{(\hbar\omega)^3}$$

5) Exprimer $\overline{N}$ à l'aide du paramètre γ et de la fonction $I_2(\alpha')$.

6) À $\overline{N}$ fixé, déterminer le comportement de α' dans la limite de très haute température.

7) On se donne le nombre (moyen) de particules dans le piège N et, partant d'une valeur élevée de la température, on laisse celle-ci diminuer. Montrer que, pour une certaine valeur T_0 de la température, α atteint la borne supérieure autorisée, déterminée à la question 2. Préciser la valeur de γ à la température T_0 en fonction de N. Que se passe-t-il lorsque $\overline{N}$ augmente ? Le remplacement d'une série par une intégrale en 4) était-il justifié ?

8) Aux températures inférieures à T_0, il y a condensation de Bose-Einstein. Alors, comme pour le cas de la condensation de particules libres dans une boîte étudié au TD n°4, un nombre macroscopique d'atomes $N_0(T)$ occupent l'état fondamental.

Remplacer la série (**??**) par une intégrale revient à attribuer un poids statistique nul à un niveau isolé. Ici, on voit que le niveau fondamental joue un rôle particulier pour $\alpha' \to 0$. Pour tenir compte de ce rôle particulier, nous devons séparer la contribution du niveau fondamental de celle des autres niveaux :

$$\overline{N} = \frac{1}{\exp(-\alpha') - 1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n}{\exp(\beta\hbar\omega n - \alpha') - 1}$$

On appelle $N' = N - N_0$, le nombre d'atomes situés dans les états excités.

Calculer la proportion N'/N d'atomes se trouvant sur des niveaux autres que le niveau fondamental lorsque l'on a condensation.

9) En déduire la proportion de bosons N_0/N se trouvant sur le niveau fondamental et la représenter en fonction de T.

10) Le piège est tel que $\hbar\omega/k \approx 9.10^{-9}$ K. Le nombre d'atome piégés étant de l'ordre de 40000, calculer la température de condensation T_0.