

TD 1 Physique Statistique

Particules dans une boîte 3D. Approximation classique. Dénombrement dans l'espace des phases

Dans ce TD, nous allons aborder la notion d'approximation classique dans une situation physique "simple" : celle d'une particule enfermée dans une boîte cubique de volume $V = L^3$. Nous allons donc compter le nombre d'états accessibles au système d'énergie égale ou inférieure à une valeur E , en faisant une application numérique pour différentes tailles de boîte et différentes énergies, et nous apercevoir que pour la quasi totalité des systèmes physiques, ce nombre est gigantesque, et que l'écart typique entre deux niveaux d'énergie accessible autour de E est ridiculement petit, si petit que l'on pourra considérer que le spectre en énergie est une variable continue. Ceci simplifiera nombre de calculs, et fera intervenir la notion de densités d'états.

Point méthodo : ce que nécessitent les calculs en physique statistique

La physique statistique permet de calculer des grandeurs macroscopiques (comme la température, ou l'énergie moyenne d'un système) en effectuant, par exemple, des moyennes statistiques de certaines fonctions sur un ensemble de réalisations d'un même système, qu'on appelle *ensemble représentatif*.

En pratique, la physique statistique nous amène à calculer des sommes du type : $\bar{E} = \sum_r P_r E_r$, où r représente les différents états microscopiques pouvant être occupés par un système d'état macroscopique donné, P_r la probabilité d'occuper cet état, et E_r l'énergie qui lui est associée. (On verra plus tard le calcul d'autres quantités, comme la fonction de partition canonique $Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$ dans la même logique). On voit donc que pour faire des choses utiles en physique statistique, on a, sur le papier, besoin de trois choses essentielles :

- Définir les états accessibles, les r , dans un ensemble de contraintes donné. Ceci peut se faire selon plusieurs méthodes (mécanique quantique, mécanique classique).
- Définir l'énergie E_r de chacun de ces états accessibles r , qui découle naturellement des propriétés de l'état r précédent.
- Définir la loi de probabilité, les P_r . Pour rappel, les P_r correspondent, pour un état macroscopique donné d'un système, à la probabilité qu'il soit dans un état microscopique r . Les P_r sont déterminés notamment grâce au postulat fondamental de la physique statistique.

MAIS REMARQUE TRES IMPORTANTE !

Quand on parle de définir les états accessibles r , on pourrait penser que cela signifie être capable de décrire toutes les variables microscopiques qui caractérisent ce système.

En pratique, ce n'est pas nécessaire.

Il faut souligner dès maintenant (et par anticipation) que les calcul des grandeurs macroscopiques en physique statistique ne font intervenir exclusivement que les énergies E_r des états r . **En d'autres termes, nous n'avons pas besoin de définir dans le détail (i.e. toutes les valeurs des degrés de liberté) quels sont les états accessibles r , mais surtout**

quelles sont les énergies accessibles E_r , et combien d'états correspondent à cette même énergie E_r .

On va donc régulièrement remplacer les sommes indexées sur les différents états accessibles r par des sommes indexées sur les niveaux d'énergie accessibles E_r . Par exemple :

$$\sum_r e^{-\beta E_r} \rightarrow \sum_E \sum_{r|E=E_r} e^{-\beta E_r} \rightarrow \sum_E g_E e^{-\beta E}$$

où g_E est le facteur de dégénérescence, i.e. le nombre d'états microscopiquement différents mais correspondant à une même énergie macroscopique E . Sous certaines conditions que l'on verra dans ce TD, on pourra considérer que les différentes énergies accessibles sont tellement proches qu'elles forment un spectre continu. Alors les calculs de sommes discrètes deviendront des calculs d'intégrale, et la dégénérescence des niveaux laissera la place à ce qu'on appellera la *densité d'états* :

$$\sum_E g(E) e^{-\beta E} \rightarrow \int g(E) e^{-\beta E} dE$$

avec $g(E)$ la densité d'états autour de l'énergie E .

Approche du TD

En résumé, pour faire des calculs en physique statistique, on doit donc en pratique définir deux éléments :

- Les niveaux d'énergie accessibles E .
- La dégénérescence de ces différents niveaux ou la densité du spectre d'énergie en ses différents points

Dans ce TD, nous allons travailler sur les deux aspects.

Tout d'abord, nous allons définir les énergies accessibles du système selon l'approche quantique et classique. Nous allons recalculer le spectre, discret, en énergie d'une particule libre dans le cas de la mécanique quantique. Par ailleurs, on sait déjà que la mécanique classique, n'introduit pas de contraintes particulières sur l'énergie cinétique d'une particule : le spectre est continu.

Puis nous allons définir la dégénérescence/densité des différents niveaux d'énergie. D'abord la "vraie" dégénérescence des états discrets dans le cas quantique. Puis en remarquant que les états sont tellement serrés en énergie qu'ils forment un quasi-continuum, on définira une densité du spectre d'énergie dans le même cas quantique. Enfin, on mènera le même calcul dans le cas classique, qui est basé lui sur un "vrai" continuum. Et on retrouvera le même résultat en utilisant une technique de dénombrement appelée approximation classique.

Principe du calcul de densité d'états

La méthode utilisée dans les deux cas de calculs de densité, quantique et classique est similaire.

Calculer une densité signifie que l'on veut savoir le nombre dN d'états compris entre une énergie E et $E + dE$. Il s'agit donc bien de dénombrement.

Pour répondre en pratique à cette question, on travaille dans un espace vectoriel bien choisi, un espace des phases, dans lequel il est possible de placer des points pour chaque état accessible au système, et de définir autour de chacun de ces points un petit volume individuel, de telle sorte que chaque état accessible au système définisse une cellule indépendante au sein de cet espace des phases, et que l'ensemble de ces cellules contigues pave l'espace. Ce petit volume est le "volume d'un état".

On définira dans notre espace des phases un volume élémentaire tel que soient compris dans ce volume tous les points dont les états sont accessibles correspondent à des énergies comprises entre E et $E + dE$. Compter ce nombre d'états accessibles - donc calculer la densité - reviendra à compter le nombre de cellules individuelles au sein de ce volume élémentaire, autrement dit, à diviser ce volume élémentaire par le volume occupé par un état accessible.

1 Approche quantique

1.1 Niveaux d'énergie

Nous avons un gaz constitué de particules monoatomiques de masse m , quasi ponctuelles, indépendantes, dans un récipient de volume $V = L^3$. Ces particules possèdent toutes une énergie cinétiques, se baladent dans la boîte, et rebondissent sur les parois sans perdre d'énergie. Cette énergie de cinétique est associée aux trois degrés de liberté de translation de l'atome. En mécanique quantique cependant, on sait qu'une particule ne peut pas posséder n'importe quelle énergie cinétique dans la boîte : le spectre des énergies accessibles est quantifié en raison du confinement imposé par la boîte. Le spectre est constitué des valeurs propres de l'hamiltonien d'une particule libre. Les fonctions d'onde accessibles à une particule libre sont des ondes stationnaires (similaires aux différents modes d'une cavité optique).

Le hamiltonien d'une particule libre (pas d'interaction) s'écrit :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta = \frac{-\hbar^2}{2m} [\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}] = H_x + H_y + H_z$$

On peut alors chercher les solutions de l'équation aux valeurs propres de l'énergie par séparation des variables, en posant $\Phi(x, y, z) = \Phi_x(x)\Phi_y(y)\Phi_z(z)$. On obtient alors :

$$H\Phi = (H_x + H_y + H_z)\Phi_x\Phi_y\Phi_z = E\Phi_x\Phi_y\Phi_z$$

$$\frac{H_x\Phi_x(x)}{\Phi_x} + \frac{H_y\Phi_y}{\Phi_y} + \frac{H_z\Phi_z}{\Phi_z} = E$$

Et l'on est amené à résoudre $H_i\Phi_i = E_i\Phi_i$ pour $i = x, y, z$ et avec $E = E_x + E_y + E_z$.

Les conditions aux limites de la boîtes sont données par $\Phi_i(0) = \Phi_i(L) = 0$ et la condition de normalisation est donnée par $\int |\Phi_x(x)|^2 dx = 1$.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi_x(x)}{\partial x^2} = E_x \Phi_x(x)$$

La solution générale s'écrit :

$$\Phi_x(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \quad \text{avec} \quad E = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$$

Les conditions aux limites donnent $B = 0$ et $k_x = \frac{n_x \pi}{L}$. La condition de normalisation donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_x(x)|^2 dx = |A|^2 \int_0^L \sin^2(k_x x) dx = |A|^2 \frac{L}{2} = 1$$

Soit au final pour la dimension x :

$$\Phi_x(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \quad E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} \quad k_x = \frac{n_x \pi}{L}$$

Dans les trois dimensions, on a simplement :

$$\Phi(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$

$$\text{et} \quad E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad n_i \in N^*$$

On peut également définir le vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ tel que $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

1.2 Ordre de grandeur - Densité d'états

Dans la partie précédente, nous avons trouvé que le spectre en énergie est donné par un triplet de nombres quantiques (n_x, n_y, n_z) , chacun représentant l'énergie cinétique de translation dans une direction de l'espace à l'intérieur de la boîte. Ce sont des entiers non nuls, et on retrouve bien le fait que le confinement d'une particule dans une boîte discrétise ses niveaux d'énergie.

Calculons l'écart entre les deux premiers niveaux d'énergie ΔE pour l'atome de ^{32}S dans une boîte de 10 cm de côté. L'énergie du premier niveau est donnée par le triplet (1,1,1) :

$$E_{1,1,1} = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

Le deuxième niveau est dégénéré trois fois, c'est à dire que trois ensembles de nombres quantiques (et donc trois états quantiques) possèdent une même énergie :

$$E_{2,1,1} = E_{1,2,1} = E_{1,1,2} = 6 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad (1)$$

A noter que pour les niveaux d'énergie plus élevés, le calcul de la dégénérence devient un problème d'arithmétique compliqué (trouver tous les triplets d'entiers tels que la somme de leur carré est constante). Toutefois, on a un ordre de grandeur des écarts entre niveaux d'énergie :

$$\Delta E \approx E_{2,1,1} - E_{1,1,1} = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

Passons à l'application numérique : $m_{^{32}S} = \frac{32.10^{-3}}{6.02.10^{23}} \text{ kg}$, $L = 10\text{cm}$, $\hbar = 6,62.10^{-34}\text{J.s}$.
(On a utilisé la définition de la mole pour déterminer la masse de l'atome).

On obtient $\Delta E = 3.10^{-40}\text{J} = 1,95.10^{-21}\text{eV}$ ce qui est ridiculement faible devant le quantum d'énergie thermique à température ambiante $k_B T = 4,11.10^{-21}\text{J} = 25,7\text{meV}$ à 300K.

On peut à l'inverse chercher la température équivalente θ_t telle que $k_B \theta_t = \Delta E$. θ_t est alors appelée température caractéristique de la translation. Elle représente l'élévation de température nécessaire à l'atome pour grimper aux niveaux d'énergie supérieurs au fondamental. On trouve $\theta_t = 2.10^{-17}\text{K}$, ce qui est ridiculement faible en comparaison des températures obtenues même dans des conditions extrêmes (expériences d'Helium métastable de l'Institut atteignant le μK !!!). Ce résultat veut dire plusieurs choses :

- Même à des températures extrêmement basses, et en confinant un atome dans une boîte de 10 cm de côté, les écarts entre niveaux sont tellement faibles qu'on peut raisonnablement dire qu'ils forment un continuum d'énergie.
- Par ailleurs, dans n'importe quelle condition de température, un atome dans une boîte de 10 cm occupe vraisemblablement des états quantiques correspondant à des nombres quantiques, très, très élevés.

Comme tous les états sont extrêmement rapprochés jusqu'à former un continuum, il fait sens d'essayer de calculer la densité de continuum $\frac{dN}{dE}$; c'est à dire le nombre d'états quantiques d'énergie comprise entre E et $E + dE$, normalisé en redoublant par la largeur de cette bande en énergie.

On se place donc dans l'espace des nombres quantiques : c'est un espace à 3 dimensions, dans lequel chacun des points accessibles correspond à une énergie donnée. Ici, les points accessibles

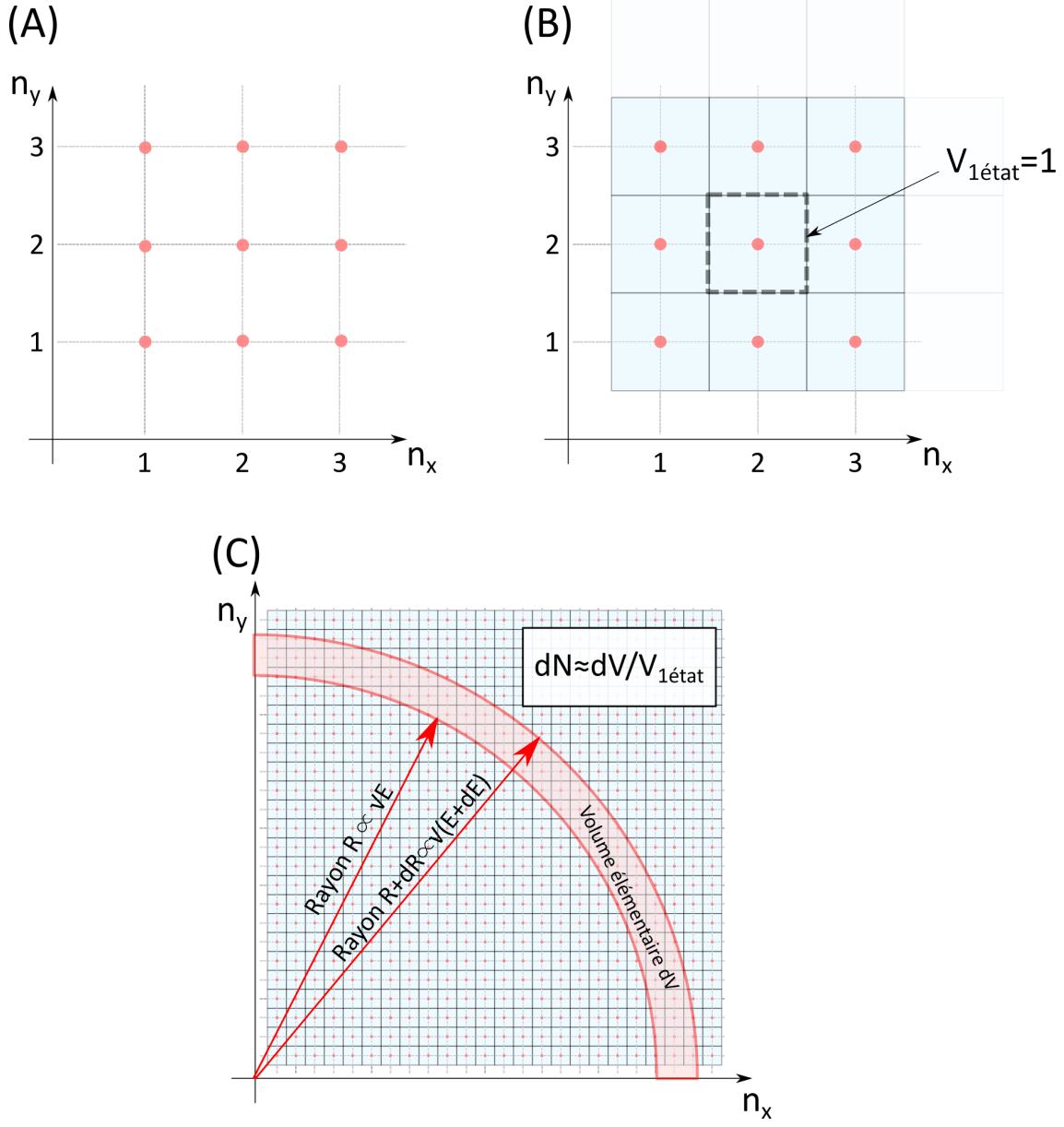


Figure 1: **Dénombrement d'états quantiques à l'aide d'un calcul de volume dans l'espace des nombres quantiques (représenté dans le cas 2D).** (A) Représentation des états discrets du spectre quantique par des points formant les noeuds d'un réseau cubique, espacés d'une distance 1. (B) Pavage continu de l'espace, et attribution d'un volume individuel à chaque point/état accessible représenté dans l'espace des phases. (C) Représentation du dénombrement des états d'énergie comprise entre E et $E + dE$. Pour une énergie donnée, les états sont situés à la surface d'une sphère dans l'espace des phases. Les états compris dans une bande d'énergie appartiennent donc au volume de la couronne comprise entre deux sphères de rayons différents. Le nombre d'états recherchés est la valeur de ce volume élémentaire divisé par la taille du volume attribué à un état dans cet espace.

sont les entiers positifs non nuls (voir Figure 1(A)), c'est à dire que seul 1/8 de l'espace 3D est occupé par des points d'états accessibles, le 1/8 correspondant aux nombres quantiques tous positifs. Les états d'énergie forment donc un **réseau cubique, de côté unité**. On va donc associer à chaque point de ce réseau son propre volume élémentaire, $V_{\text{etat}} = 1$, car la maille élémentaire du réseau est un cube de côté 1, donc de volume 1 ! (Voir Figure 1(B))

Tous les états d'énergie E fixée sont sur la sphère d'équation :

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{2mL^2E}{\hbar^2\pi^2} \quad \text{dont le rayon est :} \quad R = \sqrt{\frac{2mL^2E}{\hbar^2\pi^2}}$$

Le nombre dN recherché d'états compris entre E et $E + dE$ est donc le nombre de points du réseau compris entre les sphères de rayon R et $R + dR$, avec

$$R = \sqrt{\frac{2mL^2E}{\hbar^2\pi^2}} \quad \text{et} \quad dR = \sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}(d\sqrt{E})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2}} \frac{dE}{\sqrt{E}} \quad (2)$$

Or on sait que même un incrément élémentaire dE sera grand devant l'écart en énergie entre deux niveaux ΔE ($dE \gg \Delta E$), donc on peut s'attendre à ce que $dN \gg 1$. Dans ces conditions, on va négliger les problèmes de frontière (i.e. l'intersection entre le bord de la sphère et les volumes cubiques élémentaires des points au bord du domaine).

Finalement, dN est le volume de la couronne sphérique d'épaisseur dR , divisé par 8 (on ne considère que le premier octant où les trois nombres quantiques sont positifs), et également, pour le principe, divisé par le volume occupé par un état, ici $V_{\text{etat}} = 1$ (voir Figure 1(C)).

$$dN = \frac{1}{8}(4\pi R^2 dR) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2mL^2}{\hbar^2\pi^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE = \frac{4\sqrt{2}\pi V}{h^3} m^{3/2} \sqrt{E} dE \quad (3)$$

On obtient donc la densité en divisant ce nombre dN par la largeur élémentaire de la bande en énergie dE :

$$\frac{dN}{dE} = \frac{4\sqrt{2}\pi V}{h^3} m^{3/2} \sqrt{E} \quad (4)$$

Ce résultat n'est valable que si dE peut être choisi suffisamment petit pour que $dE \ll E$ (c'est une grandeur élémentaire) $dE \gg \Delta E$ (pour obtenir un continuum). Cette limite est la limite des grands nombres quantiques. Comme explicité plus haut, elle est dans l'immense majorité des cas particulièrement bien vérifiée (même dans des situations d'aspect déjà extrême !).

2 Approche classique

En physique classique, un état est défini par un point dans l'espace des phases (x, y, z, p_x, p_y, p_z) : c'est à dire que l'état d'une particule est défini par sa position dans l'espace de la boîte (de volume limité $V = L^3$) et sa vitesse (qui est donnée par le vecteur d'impulsion $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$).

L'énergie d'une particule est ici uniquement cinétique et de translation. Elle dépend uniquement de la valeur de son impulsion totale (donc des (p_x, p_y, p_z)). L'énergie vaut $E = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$, soit $p = \sqrt{2mE}$.

On va calculer maintenant le volume $d\Gamma$ du micro-espace des phases qui correspondent à des états d'énergie compris entre E et $E + dE$.

On remarque que ce volume est égal à celui occupé dans l'espace des phases par des états d'impulsion totale comprise entre $p = \sqrt{2mE}$ et $p + dp = \sqrt{2m(E + dE)}$. On voit là encore que tous les états d'énergie E donnée sont situés sur une sphère de rayon $p = \sqrt{2mE}$ dans le sous-espace des impulsions (p_x, p_y, p_z) . Tous les états compris entre E et $E + dE$ vont donc aussi faire intervenir le calcul du volume d'une coquille de sphère, comme dans le cas précédent.

Attention cependant, on demande ici de calculer un volume dans l'espace des phases qui est un espace à 6 dimensions pour une particule ! Il s'agit donc de calculer une intégrale sextuple : Le volume élémentaire recherché est défini par un incrément sur UNE SEULE dimension parmi les 6 (qui est le module/rayon de p). Autrement dit, il ne faut pas oublier d'intégrer sur les 5 autres variables, y compris les variables d'espace :

$$d\Gamma = \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_p^{p+dp} p^2 dp = V 4\pi p^2 dp \quad (5)$$

où V est bien le volume de la boîte (on a intégré les 3 variables de position x, y, z sur l'entièreté de leur domaine accessible, soit sur $[0, L]$ à chaque fois) ; et où $4\pi p^2 dp$ est bien le volume élémentaire d'une coquille de sphère sur les dimensions d'impulsion de l'espace des phases.

En notant que $p^2 = 2mE$ et $dp = \frac{\sqrt{2m}}{2} \frac{dE}{\sqrt{E}}$, on obtient :

$$d\Gamma = 4\sqrt{2}\pi V m^{3/2} \sqrt{E} dE \quad (6)$$

3 Comparaison des deux approches

D'un point de vue classique, l'énergie (cinétique de translation) d'une particule enfermée dans une boîte peut prendre un ensemble continu de valeurs, tandis que cet ensemble est dénombrable d'un point de vue quantique.

Néanmoins, la comparaison des résultats des deux sections précédentes montrent qu'à la limite des grands nombres quantiques on peut dénombrer les états quantiques de translation d'une translation d'une particule enfermée dans une enceinte à partir de l'espace de phase classique, à condition d'attribuer à chaque état quantique un volume h^3 dans le micro-espace des phases (à 6 dimensions) de la particule. En effet, le nombre d'états quantiques dN est égal au volume $d\Gamma$ divisé par le volume h^3 attribué à un état :

$$dN = \frac{d\Gamma}{h^3} \quad (7)$$

Cette technique de dénombrement est appelée approximation classique pour la translation. Elle est en fait généralisable à tout type de degré de liberté.

Complément :

On peut généraliser ces résultats 3D aux cas 2D et 1D. Ainsi, si à trois dimensions on a:

$$dN = \frac{V d^3 \mathbf{p}}{h^3} = \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} \quad (8)$$

On obtient en 2D et 1D :

$$dN = \frac{S d^2 \mathbf{p}}{h^2} = \frac{S 2\pi pdp}{h^2} \quad \text{et} \quad dN = \frac{L dp}{h} \quad (9)$$

Bonus : cas de l'oscillateur harmonique

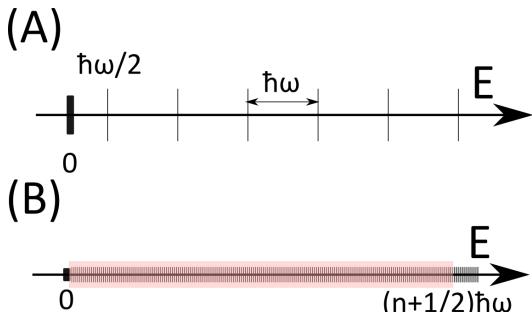
L'énergie d'un oscillateur harmonique est donnée par la somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle (du rappel élastique par exemple).

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

Dans le cas quantique, le spectre en énergie est là-aussi quantifié :

$$E = (n_x + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0$$

Et les niveaux en énergie sont régulièrement répartis. De manière tout à fait analogue au cas précédent, on va trouver un espace géométrique bien choisi pour dénombrer les états. Ici, on



$$N(E) = V_{qu}/V_{1\text{état}} = E/\hbar\omega (+1)$$

Figure 2: **Dénombrément d'états quantiques à l'aide d'un calcul de volume pour l'oscillateur harmonique 1D.** (A) Représentation du spectre en énergie près de 0. (B) Dénombrément du nombre d'états d'énergie inférieure ou égale à E

choisit simplement de représenter l'axe des énergies accessibles. On y place des points représentant les états accessibles. On a donc un point à chaque $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0$, pour tous les n entiers (y compris l'entier nul). Chaque état occupe une longueur $\hbar\omega_0$ autour de lui. La densité d'états est constante !

On peut calculer le nombre $N(E)$ de niveaux d'énergie inférieure ou égale à E est donné par le rapport du volume total qui nous intéresse, divisé par le volume occupé par un état individuel. Le volume total est ici la longueur du segment portant tous les états souhaités (ici $V_{qu} = E$) et le volume d'un état est $V_{qu,1\text{état}} = \hbar\omega_0$

$$N(E) = \frac{V_{qu}}{V_{qu,1\text{état}}} = \frac{E}{\hbar\omega_0} \pm 1$$

où le ± 1 est présent à cause de l'indétermination à l'énergie de l'oscillateur à $n_x = 0$.

Faisons le même calcul dans le cas classique. On cherche à calculer un volume dans l'espace des phases (x, p_x) , sachant qu'il n'y a pas a priori de restriction sur les valeurs de x ou p_x en terme d'états accessibles. Les états d'énergie égale à E vérifient :

$$\frac{p^2}{p_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} = 1$$

avec $p_0 = \sqrt{2mE}$ et $x_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\omega_0^2}}$. On vient donc d'obtenir l'équation d'une ellipse. Au cours du temps, l'oscillateur parcourt la trajectoire représentée par cette ellipse dans l'espace. Les états d'énergie inférieurs sont tous inclus à l'intérieur de cette ellipse. Ainsi, le volume de l'espace des phases associé est assimilable à la surface de cette ellipse :

$$V_{cl} = \pi p_0 x_0 = \frac{2\pi E}{\omega_0}$$

Il est important de noter que l'espace des phases n'est PAS un espace initialement discrétilisé !! C'est un espace où les états accessibles forment rigoureusement un continuum. Mais on retrouve que, **dans le cadre de validité de l'approximation classique**, on peut dénombrer le nombre d'états d'excitation de l'oscillateur harmonique à partir de l'espace de phase classique en attribuant à chaque état un volume h^N dans l'espace des phases avec N le nombre de degrés de liberté du système. Autrement dit, l'approximation classique revient à forcer la discrétilisation de l'espace des phases avec des volumes élémentaires ridiculement petits, tellement petits qu'ils forment en pratique un quasi-continuum.

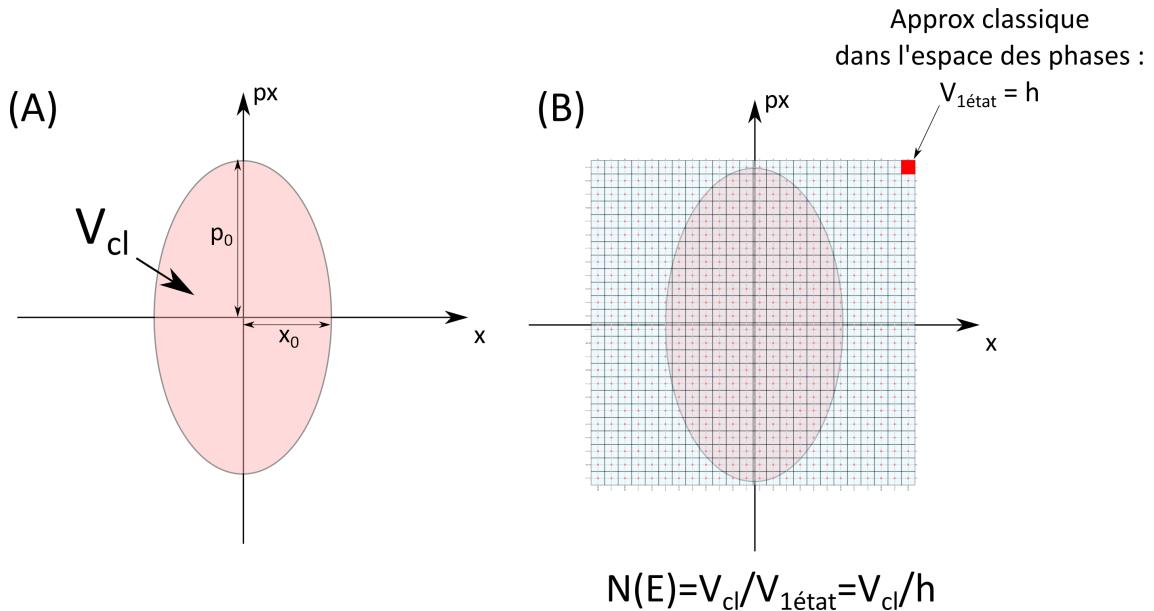


Figure 3: **Dénombrement d'états classiques à l'aide d'un calcul de volume dans l'espace des phases pour l'oscillateur harmonique 1D.** (A) Représentation de l'espace des phases pour l'oscillateur 1D. Les états d'énergie inférieure ou égale à une valeur E donnée occupent une ellipse dont les axes sont de longueur x_0 et p_0 . (B) Approximation classique : on discrétise virtuellement cet espace continu en le divisant par des volumes élémentaires de taille h , qui est le volume attribué à un état individuel dans cette approximation. L'approximation est valide lorsque le volume de l'espace des phases est très grand devant h . On retrouve le nombre d'états calculés quantiquement en comptant le nombre de cellules de taille h contenues dans V_{cl} .

$$N(E) = \frac{V_{cl}}{h} = \frac{2\pi E}{2\pi\hbar\omega_0} = \frac{E}{\hbar\omega_0}$$

L'expression précédente est en effet valide uniquement si $E = (n_x + \frac{1}{2})\hbar\omega_0 \approx n_x\hbar\omega_0$, soit $n_x \gg \frac{1}{2}$: c'est la **limite des grands nombres quantiques**.