

TD 1 Optique Physique

Interférométrie stellaire

Dans ce TD, nous allons aborder la notion de cohérence spatiale entre deux points de l'espace. On dit que deux points sont spatialement cohérents lorsqu'il existe des corrélations statistiques entre le champ mesuré au premier point et le champ électrique mesuré au second point, c'est à dire si l'évolution relative de ces deux champs n'est pas complètement aléatoire, en amplitude et/ou en phase. On peut alors montrer que la superposition de champs propagés depuis deux points spatialement cohérents produit une figure d'interférence dont le contraste est relié au degré de cohérence spatiale.

1 Degré de Cohérence spatial - Rappels

1.1 Position du problème : Dispositifs de trous d'Young

A.1 – 1) Dans le cas général, on dispose d'une source, plus ou moins étendue, plus ou moins monochromatique, qui génère un champ électrique dans tout l'espace : chaque point de la source émet des ondes qui se propagent dans toutes les directions. Observer le champ en un point de l'espace c'est donc s'intéresser à cette superposition a priori très complexe de champs issus des différents points de la source.

Pour autant, il peut arriver sous certaines conditions que différents points de l'espace présentent des champs statistiquement corrélés (c'est à dire des champs très semblables ou dont l'évolution relative fluctue peu). L'exemple le plus évident est de choisir deux points très proches dans l'espace, par exemple séparés d'une distance très inférieure à la longueur d'onde : on imagine bien que le champ électrique ne peut pas varier infiniment vite et aléatoirement pour des points suffisamment proches.

Mais il existe d'autres situations moins triviales et c'est le sujet de ce TD. Pour quantifier cette corrélation entre champs, on utilise un outil, le degré de cohérence spatiale, qui se mesure entre les deux points de l'espace dont on souhaite quantifier la corrélation des champs.

Pour mesurer le degré de cohérence, on essaye de générer des interférences entre les champs existant à ces deux points. Le principe fondamental des interférences est de transformer une information de phase (ici, la phase relative entre deux champs, qui n'est pas mesurable telle qu'elle par un détecteur) en une variation d'intensité (des franges plus ou moins contrastées, ce qui se mesure avec un détecteur).

Pour générer des interférences entre les deux points qui nous intéressent et eux seulement, il convient de supprimer les contributions d'autres points de l'espace, et de laisser les champs se propager depuis les deux points A et B vers un écran où on visualisera les interférences : c'est en somme ce qui est réalisé par les trous d'Young. On peut ainsi écrire l'intensité au point d'observation M de manière générale :

$$I_M = \langle |E_M^A(t) + E_M^B(t)|^2 \rangle \quad (1)$$

Il faut écrire que ces champs en M sont propagés depuis des champs en A et B :

$$I_M = \langle |E_A(t) \exp^{ik[AM]} + E_B(t) \exp^{ik[BM]}|^2 \rangle \quad (2)$$

D'où les termes directs et croisés :

$$I_M = \langle |E_A(t)|^2 \rangle + \langle |E_B(t)|^2 \rangle + \langle E_A(t)E_B^*(t)e^{ik([AM]-[BM])} \rangle + \text{c.c.} \quad (3)$$

$$I_M = I_A + I_B + 2\text{Re}\{\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle e^{j2\pi p_M}\} \quad (4)$$

Le produit entre crochet, qui est la mesure mathématique de la corrélation des champs, est, au sens large, un nombre complexe. On peut donc, en toute généralité, l'écrire comme le produit de son module et d'une exponentielle contenant sa phase :

$$\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle = |\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle| e^{i\phi}$$

Donc avec les notations proposées ,

$$I_A + I_B = 2I_0$$

$$C = 2|\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle| / (I_A + I_B)$$

$$I_M = 2I_0 + 2\text{Re}\{|\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle| e^{i\phi} e^{i2\pi p_M}\} \quad (5)$$

$$I_M = 2I_0(1 + C \cos(2\pi p_M + \phi)) \quad (6)$$

Le terme de phase p_M représente la différence de marche introduite par la propagation entre A et M d'une part, et B et M d'autre part. C'est une différence de marche "géométrique", qui change si l'on déplace le point d'observation M.

Le terme de phase ϕ intègre la différence de phase qui existe déjà *ab initio* entre les champs en A et B : les champs, au moment où ils oscillent, peuvent être pour différentes raisons, déjà en phase, ou en opposition, ou toute situation intermédiaire.

A.1 – 2) On mesure expérimentalement C en prenant les intensités max et min des franges à l'aide d'une photodiode ou d'une caméra, $2I_0(1 \pm C)$. On calcule alors $C = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$.

1.2 Cas des sources cohérentes

A.2 – 1) Calcul du contraste cohérent

Dans cette situation, la phase relative entre les deux champs A et B est fixée : même si les champs fluctuent au cours du temps, ils conservent cette même relation de phase en permanence. Le calcul de $\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle$ laisse sortir les termes $E_A E_B e^{i(\phi_A - \phi_B)}$ et seul reste $\langle |f(t)|^2 \rangle = 1$.

En d'autres termes, $|\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle| = \sqrt{I_A I_B}$. Le contraste s'écrit alors ici :

$$C = \underbrace{\frac{2\sqrt{I_A I_B}}{I_A + I_B}}_{C_{\text{coh}}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1 + \alpha} \quad (7)$$

Dans le cas cohérent, le contraste peut être inférieur à 1, mais seulement en raison du déséquilibre entre les amplitudes des deux champs qui interfèrent : pour avoir un contraste de franges maximal en formant des interférences à deux ondes, il faut que les amplitudes des deux champs soient égales.

L'expression complète de I_M est alors :

$$I_M = 2I_0 \left[1 + \frac{2\sqrt{I_A I_B}}{I_A + I_B} \cos(2\pi p_M + \phi_A - \phi_B) \right] \quad (8)$$

A.2 – 2) Si la source est ponctuelle, alors les champs en A et en B sont uniquement liés à la propagation d'une ondelette depuis le point S vers les deux trous de l'interféromètre.

Les phases en A et B sont liées aux trajets optiques depuis la source par $\phi_A = 2\pi[SA]/\lambda$ et idem pour B. La différence de phase est donc :

$$\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = \frac{2\pi}{\lambda}([SA] - [SB]) = 2\pi p_S \quad (9)$$

où p_S est "l'ordre côté source". Avant même que l'on considère les interférences créées en M, il faut donc ne pas oublier qu'il existe déjà un déphasage entre A et B, du à l'accumulation d'une phase "géométrique" depuis la source. A cela va s'ajouter un terme de phase similaire côté écran, là encore en raison de la propagation mais *depuis* les deux trous de l'interféromètre, comme vu dans la partie précédente. Au final :

$$I_M = 2I_0 \left[1 + \frac{2\sqrt{I_A I_B}}{I_A + I_B} \cos(2\pi p_M + 2\pi p_S) \right] \quad (10)$$

1.3 Propriétés du degré de cohérence spatiale

A.3 – 1) Propriété permettant de démontrer que $\gamma_{AB} \in [0, 1]$? C'est le théorème de Cauchy-Schwarz (produit scalaire \leq produit des normes). La démonstration se fait en prenant le module carré de $\mathbf{u} - \mu\mathbf{v}$ dont on sait qu'il est positif, et qu'on examine comme fonction de μ .)

A.3 – 2) Pour deux points sources cohérents : $|\gamma_{AB}|$ est un complexe unité. Pour deux points incohérents (champs décorrélés), $|\gamma_{AB}| \rightarrow 0$. Dans ce dernier cas, $C = 0$, donc I_M n'a pas de terme d'interférence, il se réduit à :

$$I_M = I_A + I_B \quad (11)$$

A.3 – 3) Les trous d'Young forment un "cohérence -mètre" car la mesure du contraste des franges est une mesure du degré de cohérence spatiale et indique directement si les champs en A et B sont cohérents, c'est à dire corrélés, ou pas. L'existence d'une corrélation entre A et B peut donner des informations sur la nature de la source éclairant les points A et B - nous le verrons plus tard.

2 Théorème de Van-Cittert Zernike

2.1 Formulation du problème

On s'intéresse maintenant à une source étendue : la source est maintenant une distribution continue de sources ponctuelles monochromatiques, incohérentes entre elles.

Choisissons arbitrairement un point S de la source, et un point d'observation M . Ce point va éclairer les fentes en A et B, et leurs champs vont produire des interférences sur l'écran. Le déphasage entre A et B dépend de la position de la source S par rapport aux fentes. La position des franges et leur centrage sur l'écran dépend notamment de la position de S : une source placée symétriquement entre A et B permettra de générer des franges centrées sur l'axe. Décaler S aura pour conséquence de traduire les franges sur l'écran. (**voir Figure 1**).

Considérons maintenant un deuxième point de la source S' différent du premier. Le déphasage entre A et B, est toujours parfaitement fixé là encore par la géométrie du problème - mais la distances- de propagation $S'A$ est désormais différente de $S'B$: il existe donc un déphasage entre les deux champs en A et B lorsqu'ils sont issus de S' . En d'autres termes p'_S est différent de p_S . En conséquence, cette deuxième source permet de générer un deuxième système de franges,

mais décalé du premier (voir Figure 1).

Si les deux sources S et S' sont présentes conjointement, et sont incohérentes entre elles, alors les deux systèmes de franges se superposent de manière incohérentes. S'ils ne sont pas parfaitement superposés, la résultante en est un système de franges moins bien contrasté : dans le cas extrême, on peut en effet imaginer une frange brillante du système généré par S se superposer à une frange sombre du système généré par S' de telle sorte qu'aucune modulation d'intensité n'est visible - le contraste des franges est alors nul.

Enfin, on peut étendre la réflexion en considérant une distribution continue de sources comme ici : on voit que l'extension de la source joue un rôle dans le brouillage des franges, dont la visibilité est reliée à une propriété reliant les champs en deux points de l'espace : leur corrélation. Quantifier cette corrélation, c'est le cadre du **théorème de Van-Cittert Zernike**.

2.2 Retour au TD

Le but du jeu maintenant est de montrer comment l'étendue de la source affecte le contraste des franges d'interférences sur l'écran, contraste que l'on peut déterminer en calculant I_M , l'intensité sur l'écran. La source est considérée à l'infini : sa taille est définie en terme de diamètre angulaire apparent représentée par θ_S : c'est ce que l'on fait pour les étoiles typiquement, dont on mesure le diamètre avec des angles et pas en kilomètres.

On va écrire l'intensité sur l'écran due à chacun des points sources paramétrés par θ_S , et sommer de manière incohérente les résultats.

- 1. Champ résultant en M du à l'élément de source $d\theta_S$ autour de la position θ_S : on reprend l'expression d'une interférence à deux ondes générée par un seul point source en l'adaptant :

$$dI_M(S) = 2\mathcal{I}(\theta_S)d\theta_S \left[1 + \text{Re}\{e^{i(2\pi p_M + 2\pi p_S(\theta_S))}\} \right] \quad (12)$$

où $p_S = \frac{1}{\lambda}(SA - SB)$. Lorsque θ_S varie, $p_S(\theta_S)$ varie, et le système de franges générés uniquement par le petit élément de source se déplace côté écran, voir la figure 1.

On utilise maintenant les approximations proposées pour exprimer $SA - SB$ en fonction de θ_S :

$$\begin{aligned} SA - SB &= \left(\sqrt{1 + \frac{(\frac{a}{2} + D\theta_S)^2}{D^2}} - \sqrt{1 + \frac{(-\frac{a}{2} + D\theta_S)^2}{D^2}} \right) \times D \\ &\simeq \left(1 + \frac{(\frac{a}{2} + D\theta_S)^2}{2D^2} - 1 - \frac{(-\frac{a}{2} + D\theta_S)^2}{2D^2} \right) \times D \\ &= \left(\frac{(\frac{a}{2} + D\theta_S)^2}{2D^2} - \frac{(-\frac{a}{2} + D\theta_S)^2}{2D^2} \right) \times D \\ &\simeq \frac{1}{2D} (aD\theta_S + aD\theta_S) = \frac{1}{2D} (a2D\theta_S) \\ &= a\theta_S \end{aligned}$$

On réinjecte ce résultat simple :

$$dI_M(S) = (2\mathcal{I}(\theta_S)d\theta_S) + 2\text{Re} \left[\mathcal{I}(\theta_S) e^{i\frac{2\pi a\theta_S}{\lambda}} e^{i(2\pi p_M)} d\theta_S \right] \quad (13)$$

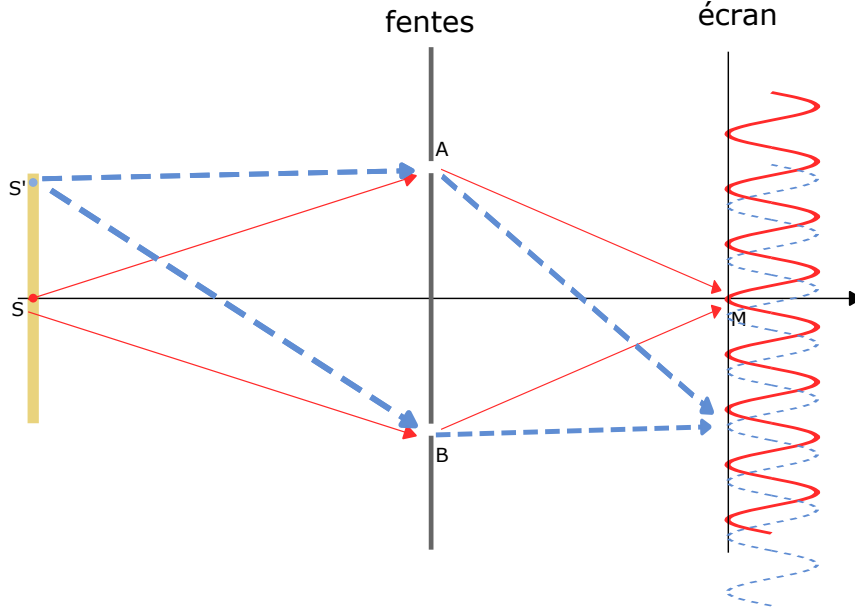


FIGURE 1 – **Décalage du système de franges en fonction de la position de l'élément de source considéré.** Le centre du système de franges généré par un point source à travers les trous d'Young correspond à une différence de marche nulle entre SAM et SBM . Pour une source hors axe optique, le centre du système de franges est également hors axe, la différence de marche $S'AMS'BM$ étant différent. Pour une source réelle, composée d'une somme de points sources, ces systèmes de franges se superposant en décalage créent un nouveau système de franges de contraste moindre.

- 2. On intègre l'expression ci-dessus (la source étendue est une somme continue de sources ponctuelles incohérentes) sur toutes les positions θ_S des points sources. On obtient tout d'abord pour le premier terme

$$\int_{\Sigma} d\mathcal{I}(\theta_S) d\theta_S = I_{\text{tot}} \quad (14)$$

On le met en facteur, et on remet explicitement les moyennes temporelles sur le second terme, ce qui donne :

$$I_M(S) = 2 \int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) d\theta_S + 2 \text{Re} \int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) e^{i \frac{2\pi a \theta_S}{\lambda}} e^{i(2\pi p_M)} d\theta_S \quad (15)$$

Soit avec la notation de l'énoncé pour I_{tot} :

$$I_M(S) = 2I_{\text{tot}} \left[1 + \text{Re} \left(\frac{\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) e^{i \frac{2\pi a \theta_S}{\lambda}} d\theta_S}{\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) d\theta_S} \cdot e^{2i\pi p_M} \right) \right] \quad (16)$$

- 3. On remarque que $\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) e^{i \frac{2\pi a \theta_S}{\lambda}} d\theta_S = \tilde{I}(\frac{a}{\lambda})$: c'est la TF de la distribution d'irradiance ! Cette TF est une fonction du rapport a/λ , elle dépend donc de la valeur de l'écartement entre A et B , ainsi que de la longueur d'onde (ce qui est normal car il est question de déphasage, et donc de différence de marche par rapport à λ).

Concrètement, cette TF est un nombre complexe que l'on, peut écrire $\tilde{I}(\frac{a}{\lambda}) = |\tilde{I}(\frac{a}{\lambda})| e^{i\phi}$. Cela permet d'écrire :

$$I_M(S) = 2I_{\text{tot}} \left[1 + \frac{|\tilde{I}(\frac{a}{\lambda})|}{I_{\text{tot}}} \text{Re}(e^{i\phi} e^{2i\pi p_M}) \right] = 2I_{\text{tot}} \left[1 + \frac{|\tilde{I}(\frac{a}{\lambda})|}{I_{\text{tot}}} \cos(2\pi p_M + \phi) \right] \quad (17)$$

On peut alors identifier le contraste total en notant que le contraste cohérent vaut 1 : on a considéré que chaque fente recevait la même quantité d'énergie. On a donc $|\gamma_{AB}| = C/C_{\text{coh}} = C$

Avec ces choix, l'expression résultante est bien :

$$I_M(S) = 2I_{\text{tot}} [1 + |\gamma_{AB}| \cos(2\pi p_M + \phi)] \quad (18)$$

avec :

$$|\gamma_{AB}(a)| = \frac{\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) e^{i \frac{2\pi a \theta_S}{\lambda}} d\theta_S}{\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) d\theta_S} = \frac{\tilde{I}(\frac{a}{\lambda})}{I_{\text{tot}}} \quad (19)$$

Plusieurs commentaires sur cette expression : d'abord, on voit que pour $a = 0$ (fentes superposées), alors le résultat vaut 1 : quelque soit la forme de la source, un champ est toujours cohérent avec lui-même.

Par ailleurs, comme avec toute TF, il faut noter une relation de réciprocité : des sources étendues auront une TF comparativement plus étroites. Seules des fentes très proches pourront donner des interférences contrastées si la source est étendue. Ou en d'autres termes, seuls deux points rapprochés sont spatialement corrélés lorsque le champ est généré par une source étendue.

Il faut donc revenir à ce qu'on appelle l'étendue d'une source. Ici, elle est définie par la largeur typique de la fonction $I(\theta_S)$. Il faut voir que la largeur de cette fonction ne nous donne pas la taille (en mètres) de la source, mais sa **taille angulaire** ! En effet, l'argument est θ_S , qui représente un angle sous lequel on regarde un point de la source depuis les trous d'Young.

Et en effet, on peut avoir des objets incroyablement grands dans l'absolu (comme des étoiles), se comporter comme des sources ponctuelles...simplement parce qu'ils sont loin (juste, regardez le ciel) !

La conséquence de la distance à la source est que les déphasages introduits par un point de la source entre les fentes A et B varient très peu lorsqu'on choisit un autre point de la source. Même si cette source est gigantesque pour une taille mesurée en kilomètres, il y a peu de variations dans le terme p_S pour les différents points de cette source. Les ondelettes générées par chaque point source se superposent très bien, conservant un bon contraste global. (voir Figure 2)

En résumé, le théorème de Van-Cittert Zernike nous dit que des sources de diamètre apparent faibles permettent de créer de la cohérence spatiale entre des points raisonnablement éloignés de l'espace. Cela nous indique que **la propagation permet de créer de la cohérence spatiale**, en réduisant le diamètre apparent de sources étendues, voir figure 2.

De fait, de tels objets peuvent créer un contraste interférentiel vraiment important même pour des fentes très éloignées dans l'absolu, c'est ce que nous allons voir.

3 Applications en interférométrie stellaire

Les étoiles sont-elles des sources ponctuelles ? Oui et non : prenons le Soleil, c'est une source loin d'être ponctuelle, même à notre échelle. Tandis que pour les étoiles hors de notre système, elles ont surtout un diamètre apparent trop petit pour être résolu par nos yeux. Mais des instruments sont capables de mesurer ce diamètre et de constater qu'il ne vaut pas 0 ! Dans cette partie, on exploite les résultats de la partie précédente, à savoir que pour des objets d'étendue non nulle, il existe une séparation entre deux points de l'espace (les fentes d'entrée de notre interféromètre) pour laquelle le contraste tombe à zéro. La position de ce zéro dépend de la taille de la source observée.

3.1 Cas d'une étoile simple

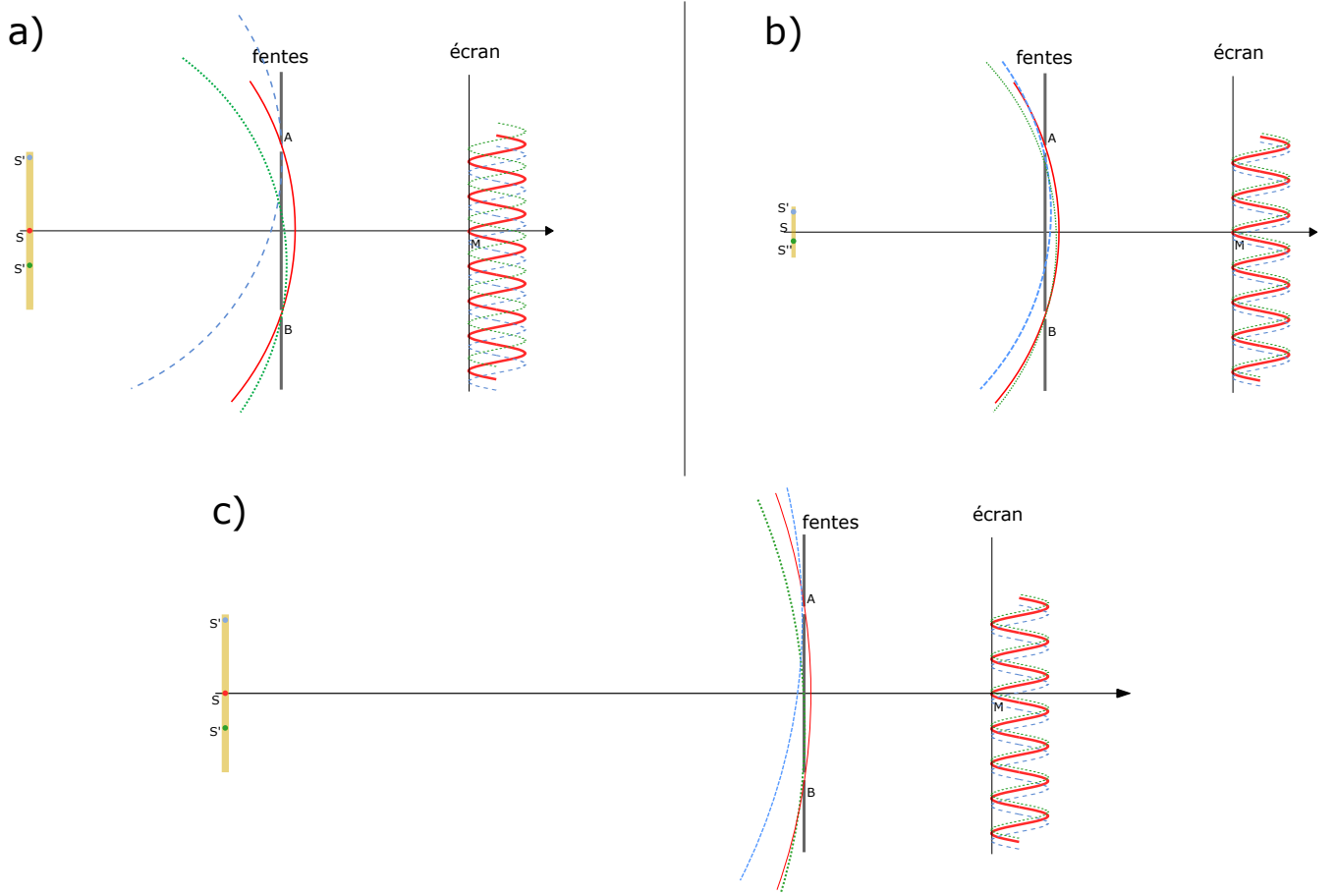


FIGURE 2 – **Variation du degré de cohérence spatiale en fonction du diamètre apparent de la source vue depuis le plan contenant les fentes.** **a)** Situation de référence, où trois points différents S, S' et S'' au sein d'une source étendue génèrent trois systèmes de franges décalés, conséquence des différents déphasages introduits entre les deux fentes par chaque source. Les arcs de cercle représentent la propagation d'ondelettes sphériques depuis chaque source. **b)** Comparativement, avec une source plus petite située à même distance des fentes. Les écarts de front d'onde pour chaque source sont moins importants, les courbures de front deviennent similaires. En conséquence, les systèmes de franges se superposent mieux, le contraste est meilleur, le degré de cohérence spatiale entre A et B plus élevé que dans la situation initiale. **c)** Situation avec source de même taille qu'en a), mais plus éloignée du plan des fentes. Là encore, les ondelettes sphériques arrivent moins déphasées les unes des autres dans le plan des fentes. Le contraste est maintenu et le degré de cohérence spatiale entre A et B est plus élevé que pour a).

1. Vu la définition de la source dans notre cas, il suffit de calculer la transformée de Fourier d'une fonction rectangle :

$$\mathcal{TF}\left(\text{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right)_u = x_0 \text{sinc}(\pi u x_0) \quad (20)$$

D'après le théorème de Van Cittert - Zernike, on a donc :

$$\gamma_{AB}(a) = \frac{I_{\text{tot}} \Delta\theta |\text{sinc}(\pi \frac{a}{\lambda} \Delta\theta)|}{I_{\text{tot}}} = |\text{sinc}(\pi \frac{a}{\lambda} \Delta\theta)| \quad (21)$$

Le résultat est donné sur la figure 3.

On remarque que la première annulation du contraste correspond à : $a = \frac{\lambda}{\Delta\theta}$. Ce qui revient à dire que la variation de l'ordre d'interférence entre les deux extrémités de la source vaut simplement (**résultat à retenir**) :

$$\Delta p_S = \frac{a \Delta\theta}{\lambda} = 1 \quad (22)$$

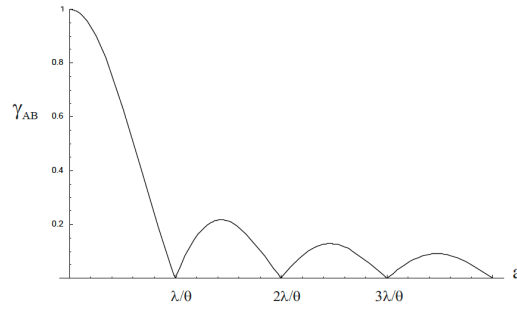


FIGURE 3 – **Contraste en fonction de l'écartement des télescopes (trous d'Young) a .**

Autrement dit, pour une source uniforme, la disparition du contraste a lieu si les états d'interférences correspondant au milieu de la source et à une extrémité sont en opposition de phase (interférences destructives)

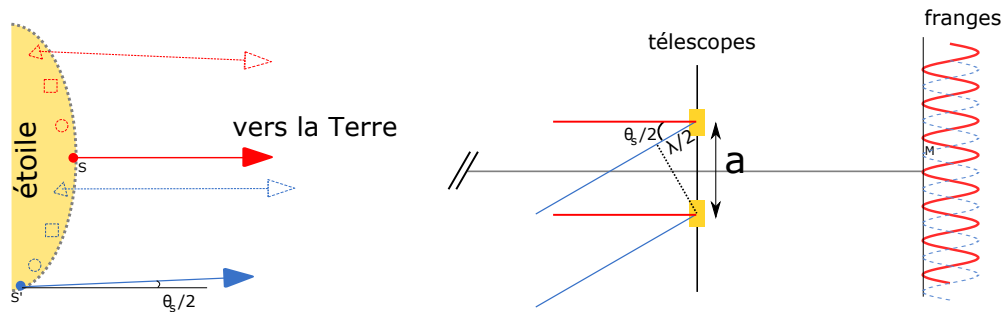


FIGURE 4 – Pour un certain écartement des franges, on peut parvenir à la situation suivante : Lorsque le déphasage entre le système de franges créé par un point au centre et celui créé par un point au bord de la source vaut une demi-onde, alors les deux systèmes de franges se brouillent parfaitement (frange sombre sur frange brillante et vice-versa. On peut continuer à associer tous les points de la source deux à deux tels que les systèmes de franges qu'ils génèrent soient en opposition. Globalement, tous les systèmes de franges générés par les points de la moitié inférieure de la source brouillent exactement ceux générés par la moitié supérieure de la source. Alors le contraste total des franges générées par l'intégralité de la source sur l'écran est nul. Sur ce dessin, la différence de marche est mesurée à l'aide d'un plan d'onde : il s'agit simplement des mêmes portions d'ondelettes sphériques de la figure 2, mais on considérant une distance de propagation infinie : les plans d'onde sont des ondelettes sphériques vues de loin !

2. Si on considère le soleil comme une source d'éclairement uniforme sur toute sa surface on a alors :

$$a_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\theta_{\text{soleil}}} \quad (23)$$

En prenant $\lambda = 500 \text{ nm}$, on obtient $a_{\max} \simeq 60 \text{ } \mu\text{m}$. Pour la lune, le diamètre angulaire est quasiment identique(d'où les éclipses...) ce qui donne le même ordre de grandeur.

3. Petite erreur historique dans l'énoncé :La perte de contraste est apparue pour $L_{\text{Betelgeuse}} \simeq 8 \text{ m}$. Michelson a donc mesuré : $\Delta\theta_{\text{Betelgeuse}} = \frac{\lambda}{L_{\text{Betelgeuse}}} \simeq 0.05''$. (mesure dans l'infrarouge à $\lambda = 2 \text{ } \mu\text{m}$)
4. Les petits télescopes peuvent se déplacer jusqu'à $L_{\max} = 200 \text{ m}$! Pour pouvoir déterminer le diamètre d'une étoile il faut pouvoir constater une première annulation du contraste. Du coup, la résolution maximale est donnée par (en prenant $\lambda = 1 \text{ } \mu\text{m}$) :

$$\Delta\theta_{\max} = \frac{\lambda}{L_{\max}} = 0.001'' \quad (24)$$

3.2 A titre d'exercice, cas d'une étoile double.