Nom :

Prénom :

Feuille d'exercices n°3

Chapitre 6 : La lumière est une onde rayonnée par des charges oscillantes

Formule de Larmor : puissance totale rayonnée par une charge accélérée

Difficulté : ($*$). On considère une charge ponctuelle située à l'origine d'un repère. A l'instant $t = 0$, cette charge subit une brusque accélération linéaire a selon l'axe x.

- Dans quelle direction le champ rayonné par la charge est-il d'amplitude nulle ? maximale ?

- On peut montrer que le champ rayonné en un point $M(\boldsymbol{r})$ en champ lointain s'écrit, dans un plan contenant le mouvement de la charge : $\boldsymbol{E_{ray}}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{rc^2}\sin\theta\,\boldsymbol{e_\theta}$, avec θ l'angle entre l'axe x et la direction pointant vers le point $M(\boldsymbol{r})$ et $\boldsymbol{e_\theta}$ le vecteur orthoradial.

  Que pouvez-vous dire de l'orientation du champ par rapport à la direction d'observation ? Qu'est-ce que cela implique sur la géométrie de l'onde qui est détectée au point d'observation ? Déduisez en une expression simple du vecteur de Poynting au point $M(\boldsymbol{r})$.

- Comment s'écrit la puissance rayonnée par la charge à travers un petit élément de surface dS autour du point d'observation $M(\boldsymbol{r})$? Intégrez ce résultat dans toutes les directions pour en déduire que la puissance totale rayonnée dans tout l'espace par une charge ponctuelle accélérée s'écrit :

$$P_{ray} = \frac{q^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}$$

Ce résultat est appelé Formule de Larmor, et est un résultat important d'électrodynamique classique.

Rayonnement d'un électron en orbite circulaire – le modèle de Rutherford

(Difficulté : *). Suite à l'expérience menée en 1909 et qui porte son nom (où il démontra l'existence du noyau atomique), Rutherford proposa un modèle de structure atomique, connu comme le modèle planétaire de l'atome. Dans ce modèle, les électrons se déplacent en suivant des orbites circulaires autour d'un noyau positif. Dans cet exercice, on s'intéresse aux implications qu'ont les équations de Maxwell sur l'électrodynamique classique d'un électron dans ce modèle.

- Le noyau positif est considéré comme immobile. L'électron est situé initialement sur une orbite circulaire une distance $r_0 = 0.05\ nm$ du noyau.

  Exprimez la force de Coulomb (électrostatique) que l'électron subit. Est-ce que l'électron subit une accélération ? Qu'en déduisez-vous en termes de rayonnement ?

- Avez-vous une idée intuitive des conséquences que cela aura sur l'énergie totale de l'électron et sur sa trajectoire ? (Si vous ne savez pas encore, passez à la suite.)

- Pour une orbite circulaire, l'accélération est radiale et orientée vers le noyau : $\boldsymbol{a} = \frac{v^2}{r}(-\boldsymbol{e_r})$.

  Utilisez ce résultat pour montrer que l'énergie totale de l'électron (potentielle + cinétique) s'écrit $E = -e^2/(8\pi\varepsilon_0 r)$ (attention au signe des 2 termes).

- Une charge en accélération rayonne et perd donc de l'énergie. Montrez que cela résulte d'une diminution de l'altitude de l'orbite de l'électron décrite par :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8\pi\varepsilon_0 r^2}{e^2}\frac{dE}{dt}$$

- La perte d'énergie par unité de temps correspond à la puissance continûment rayonnée par la charge et est donnée par la formule de Larmor, présentée dans l'exercice précédent. Insérez cette formule pour montrer que :

$$r^2 dr = -\frac{4}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 cdt$$

- En considérant que la charge démarre à l'orbite de rayon r_0 à $t = 0$, montrez que le temps T pour lequel $r = 0$, soit quand l'électron est censé s'écraser sur l'atome s'écrit :

$$T = \frac{r_0^3}{4c}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 mc^2}{e^2}\right)^2$$

- Donnez un ordre de grandeur de T. A votre avis, que penser de ce modèle ?

Nom :

Prénom :

Feuille d'exercices

Chapitre 7 : La lumière rayonnée en champ lointain : une onde plane et transverse

1. Antenne unique et approximation du champ lointain

(Difficulté : ∗∗). On va chercher à calculer le champ rayonné par une antenne extérieure GSM de téléphone portable. Cette antenne est modélisée par un fil de longueur L=0.375 m, orienté suivant z, dont le centre est placé à l'origine d'un repère (x,y,z). L'antenne émet un signal à une fréquence f=1600 MHz. On écrira la densité de courant dans l'antenne : $\boldsymbol{j}(z) = j_0\, e^{i(kz-\omega t)}\, \boldsymbol{e_z}$ avec $k = \omega/c$

1) Pour émettre à 1600 MHz, le courant injecté dans l'antenne doit être modulé à cette fréquence. Calculez la valeur de la pulsation ω et la longueur d'onde λ associée à cette fréquence.

2) Donnez les deux conditions que doit respecter la distance $r = |\boldsymbol{r}|$ à l'antenne pour que l'on puisse utiliser l'approximation de champ lointain.

3) En partant de l'équation 7.2 du cours, montrez que le potentiel vecteur en régime monochromatique rayonné par cette antenne en un point M(**r**) quelconque de l'espace peut s'écrire :

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} j_0 \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\frac{\omega}{c}z'(1-\cos\theta)} dz' \boldsymbol{e_z}$$

avec θ l'angle entre le vecteur **r** et l'axe z.

4) Résolvez cette intégrale simple (que vous devez connaitre à force !) et en déduire la norme du potentiel vecteur rayonné.

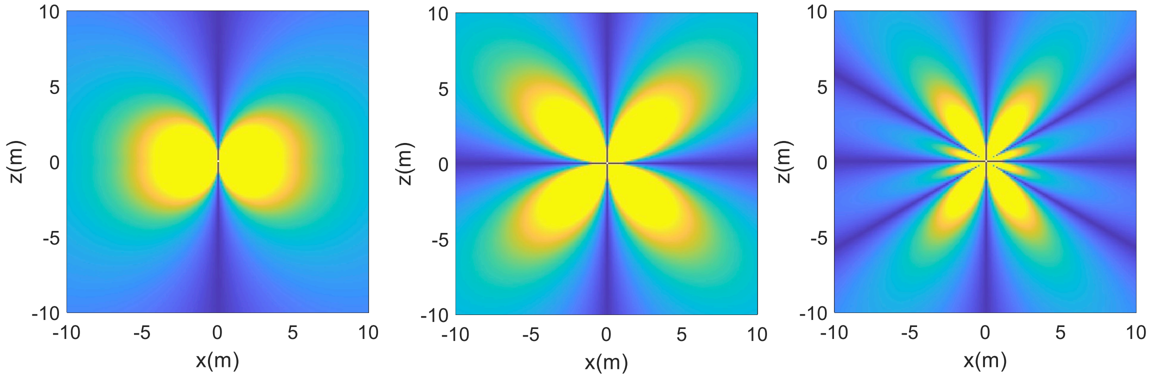
5) Sachant que ce potentiel vecteur A est orienté suivant $\mathbf{e_z}$, qui est la direction du courant qui circule dans le fil, montrez que le module du champ électrique s'écrit : $|E(\mathbf{r},\omega)| = \omega\left|\tilde{A}(\mathbf{r},\omega)\right|\sin\theta$

6) Trouvez les directions θ pour lesquelles le champ E rayonné est nul.

7) On a fait le calcul du champ rayonné sous Matlab pour différentes tailles d'antennes L, et tracé la norme de E dans le plan (xz) ci-dessous (le code se trouve à la fin si vous souhaitez le tester). Pour des questions de lisibilité, les échelles de couleurs sont différentes entre les trois figures.

Interprétez ces figures par rapport à votre calcul et identifiez laquelle correspond à l'antenne de 0.375 m étudiée.

Quelle condition doit-on vérifier pour avoir le diagramme de rayonnement tout à gauche ? Comment s'appelle ce type de rayonnement ?



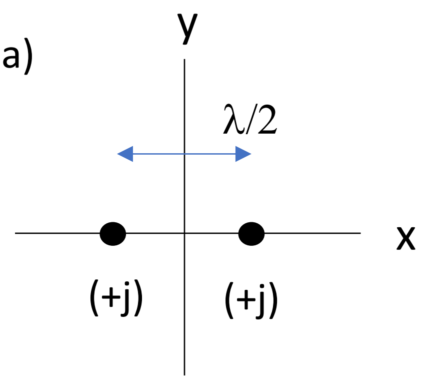
2. D’une antenne unique aux interférences, diffraction et réflexion

(Difficulté : **). Le rayonnement d’une antenne unique comme celle que vous venez d’étudier dans l’exercice précédent est une brique élémentaire en électromagnétisme à partir de laquelle on peut retrouver tous les phénomènes optiques que vous avez (ou allez) étudier : interférence, diffraction et même les simples lois de réflexion en optique géométrique. On va illustrer cela de façon qualitative dans cet exercice.

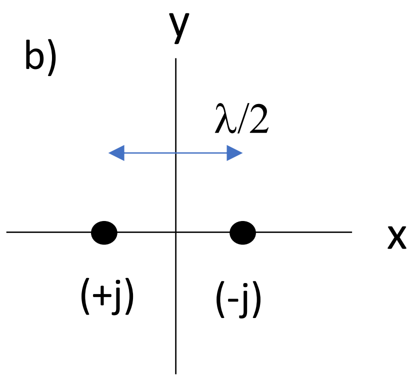
1) On considère deux antennes séparées d’une distance $\lambda/2$ sur l’axe x (figure ci-dessous). Dans le premier cas les deux antennes sont parcourues par le même courant (+**j**) et dans le second cas par des courants de sens opposés (-**j**)

2) Sans calcul, et à l'aide d'un raisonnement faisant appel à la notion d'interférences trouvez les directions dans le plan (xy) pour lesquelles l'émission sera minimum et maximum.

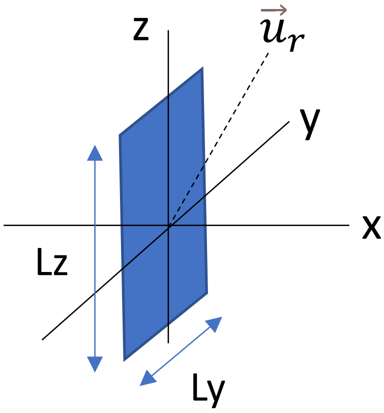
a)



b)



3) Au lieu d'un fil, on peut calculer le rayonnement d'une antenne plate de taille L_y x L_z, parcourue par une nappe uniforme de courant orientée suivant z.



a) Un moyen simple de générer une nappe de courant dans une plaque métallique est tout simplement…d'éclairer la plaque avec une onde plane, dont le champ électrique va mettre en mouvement les électrons du métal (et générer le courant). Selon quelle direction d'incidence faut-il éclairer la plaque pour générer une nappe *uniforme* telle que le propose l'exercice ?

b) Le calcul du potentiel vecteur rayonné, très similaire à celui du premier exercice, conduit à cette expression :

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} L_y L_z j_0 sinc\left(\frac{\pi L_y}{\lambda}\vec{u}_r.\vec{e}_y\right) sinc\left(\frac{\pi L_z}{\lambda}\vec{u}_r.\vec{e}_z\right)\boldsymbol{e_z}$$

Toujours sans calcul, expliquer pourquoi cette expression est « logique ».

c) Que devient l'expression précédente lorsque L_y>>λ et L_z>>λ ? Dans quelle direction (unique) est émise le faisceau ?

d) Sachant que la nappe de courant uniforme a été créée au sein de la plaque selon les conditions suggérées dans la question a), à quelle situation physique correspond le régime d'approximation précédent ? Quel nom donne-t-on en optique à une plaque métallique dont les dimensions sont très supérieures à la longueur d'onde ?

e) (passerelle vers le chapitre 8) A l'inverse, que se passe-t-il pour l'ouverture angulaire du faisceau lorsque la taille de la plaque est très inférieure à la longueur d'onde ? Montrer que la plaque est équivalente à un dipôle oscillant dont on donnera le moment dipolaire. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

f) **(BONUS)** Reprenez l'exercice en considérant que la nappe de courant qui parcourt la plaque est générée par une onde plane en incidence oblique sur la plaque. On pourra prendre le cas d'une onde incidente polarisée selon z, et de vecteur d'onde orthogonal à z. On justifiera en particulier que dans ce cas, la densité volumique de courant dans la plaque s'écrit :

$$\vec{\boldsymbol{j}}\ (x,y,z,t) = j_0\, e^{i(\alpha_i y-\omega t)}\delta(x)rect(\frac{2y}{L})rect(\frac{2z}{L})\overrightarrow{e_z}$$

Annexe :

Code Matlab du rayonnement d'une antenne en champ lointain : carte de la norme de E

```
clear;
%Rayonnement antenne unique en champ lointain
%Testez différentes tailles d'antennes!
lambda=3E8/1600E6;      % longueur d'onde à 1600 MHz
La=lambda*2;                %Taille de l'antenne (en m)
L=10;                   %Taille en xz de la zone imagée (en m)
N=501;                  % Nb de points de calcul
x=linspace(-L,L,N);
z=linspace(-L,L,N);
A=zeros(N,N);
wb=waitbar(0,'Calcul en cours...');
for i=1:N
    for k=1:N
        r=sqrt(x(i)^2+z(k)^2);           %norme de r (y=0)
        costheta=abs(z(k))/r;       %cos(theta) entre r et z
        sintheta=abs(x(i))/r;            %sin(theta) entre r et z
        A(i,k)=La*sin((pi/lambda)*La*(1-costheta))/((pi/lambda)*La*(1-costheta));
        A(i,k)=A(i,k)*exp(1j*(2*pi/lambda)*r)/r;
        E(i,k)=A(i,k)*sintheta;
    end
    waitbar(i/N,wb);
end
close(wb);
E=sqrt(E.*conj(E)); %Norme de E
pcolor(x,z,real(E'));
shading flat;
caxis([0 0.05]);
xlabel('x(m)');
ylabel('z(m)');
set(gca,'Fontsize',16);
axis square;
```

Nom :

Prénom :

Feuille d'exercices

Chapitre 8 : Lorsque la matière interagit avec la lumière : le rayonnement dipolaire et la diffusion

Diffusion par une molécule - polarisation partielle par diffusion.

(Difficulté : $*$) Dans cet exercice, nous considérons que les molécules de l'atmosphère sont caractérisées par leur polarisabilité $\alpha(\omega)$. Lorsqu'une molécule est éclairée par un champ électrique monochromatique incident $\boldsymbol{E_{inc}}(r,t) = \boldsymbol{E_0}\exp\left(i\left(\boldsymbol{k_{inc}}.\boldsymbol{r} - \omega t\right)\right) = \boldsymbol{E_{inc}}(\boldsymbol{r})\exp\left(-i\omega t\right)$ le moment dipolaire induit p_0 d'une molécule située en r_0 s'écrit : $\boldsymbol{p_0} = \varepsilon_0\, \alpha(\omega)\boldsymbol{E_{inc}}(\boldsymbol{r_0})$.

- On considère une molécule que l'on éclaire à l'origine O du repère. Quelle est l'expression du potentiel vecteur rayonné par la molécule en régime monochromatique champ lointain dans le cas d'un dipôle ? En déduire une expression générale du champ électrique rayonné (appelé alors le champ diffusé).

- L'onde plane incidente éclairant la molécule est polarisée selon Ox et se propage selon Oz. Écrire la forme du champ incident. Que vaut l'amplitude du champ complexe diffusé en champ lointain dans la direction Ox ? Dans la direction Oy ?

- On éclaire la molécule avec de la lumière solaire se propageant le long de la direction Oz. La lumière diffusée dans la direction d'observation Ox est-elle polarisée ?

Atténuation par diffusion

(Difficulté : $*$). Dans cet exercice, on s'intéresse aux mécanismes de diffusion par les molécules d'un gaz. On dispose d'une grande cuve rectangulaire qu'on peut vider ou remplir de gaz, ce qui simule à peu de choses près une tranche d'air de l'atmosphère. Lorsqu'une molécule de l'atmosphère est éclairée par une onde plane monochromatique d'amplitude E_0, on induit un dipôle $\boldsymbol{p_0} = \varepsilon_0 \, \alpha \boldsymbol{E_0}$.

Dans un premier temps, on place une source de lumière envoyant un flux lumineux sous forme d'une onde plane dans le sens de la longueur de la cuve.

- Par définition, la section efficace de diffusion d'une molécule σ_{diff} est donnée par le rapport de la puissance totale diffusée par la norme du vecteur de Poynting de l'onde incidente. Retrouvez l'expression de la puissance totale diffusée dans le cours pour donner une expression de cette section efficace. Quelle est son unité ? Que signifie physiquement cette section efficace ?

- L'atmosphère dans la cuve contient n molécules par unité de volume. On définit le libre parcours moyen par la quantité $lpm = 1/(n \, \sigma_{diff})$. Quelle est son unité ? Que représente-t-elle ?

- Que pouvez-vous dire de la luminance de ce flux au cours de sa propagation dans la cuve ? Qu'observerait un observateur observant la source de lumière depuis l'autre bout de la cuve lorsqu'on augmente la densité de gaz dans la cuve ? Et si l'observateur se place sur le côté de la cive, à 90° par rapport à l'axe de propagation de la lumière ?

Diffusion par un électron élastiquement lié

(Difficulté : ∗∗). Écrivez de manière générale l'équation du mouvement d'un électron, élastiquement lié par une force de rappel vers son atome, éclairé par une onde incidente plane et monochromatique. Déduisez-en le moment dipolaire induit pour cet électron élastiquement lié, ainsi que la section efficace de diffusion.