Nom :

Prénom :

Feuille d'exercices n°1

Chapitre 1

La lumière est une onde électromagnétique

---

1. Opérateurs et ondes planes

(Difficulté : *). Écrivez l'expression mathématique du champ $\mathbf{E}$ d'une onde plane monochromatique polarisée suivant x et se propageant suivant z. Calculez, *à l'aide des opérateurs de dérivation*, $\mathrm{div}(\mathbf{E})$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{E})$.

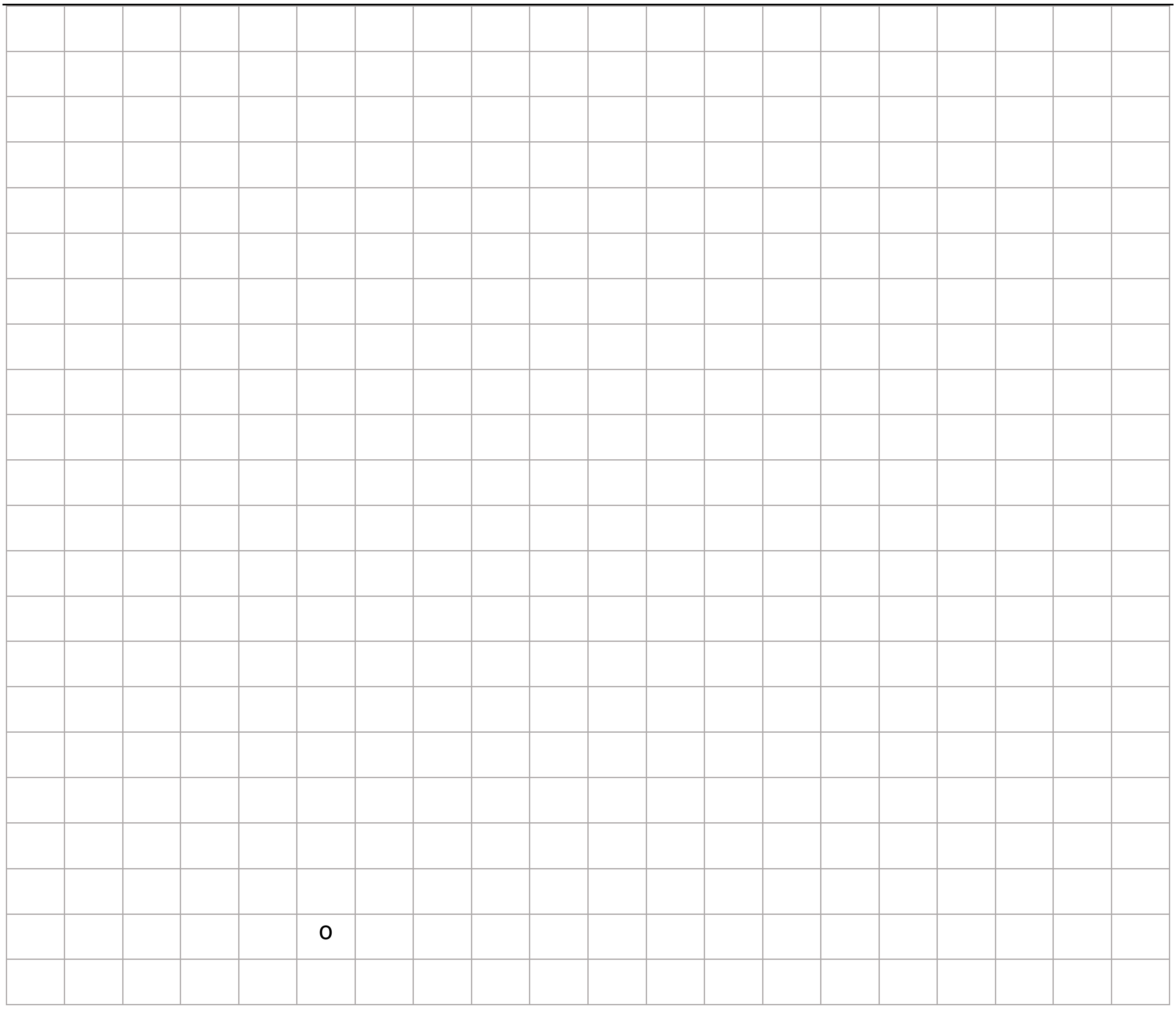
Calculez également $i\mathbf{k}.\mathbf{E}$ et $i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$, en partant de la forme vectorielle du vecteur **k** et du vecteur **E**. Quelles relations pouvez-vous écrire entre $\mathrm{div}(\mathbf{E})$ et $\mathbf{rot}(\mathbf{E})$ d'une part et $i\mathbf{k}.\mathbf{E}$ et $i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ d'autre part, *dans le cas des ondes* planes ?

2. Champ d'une onde plane

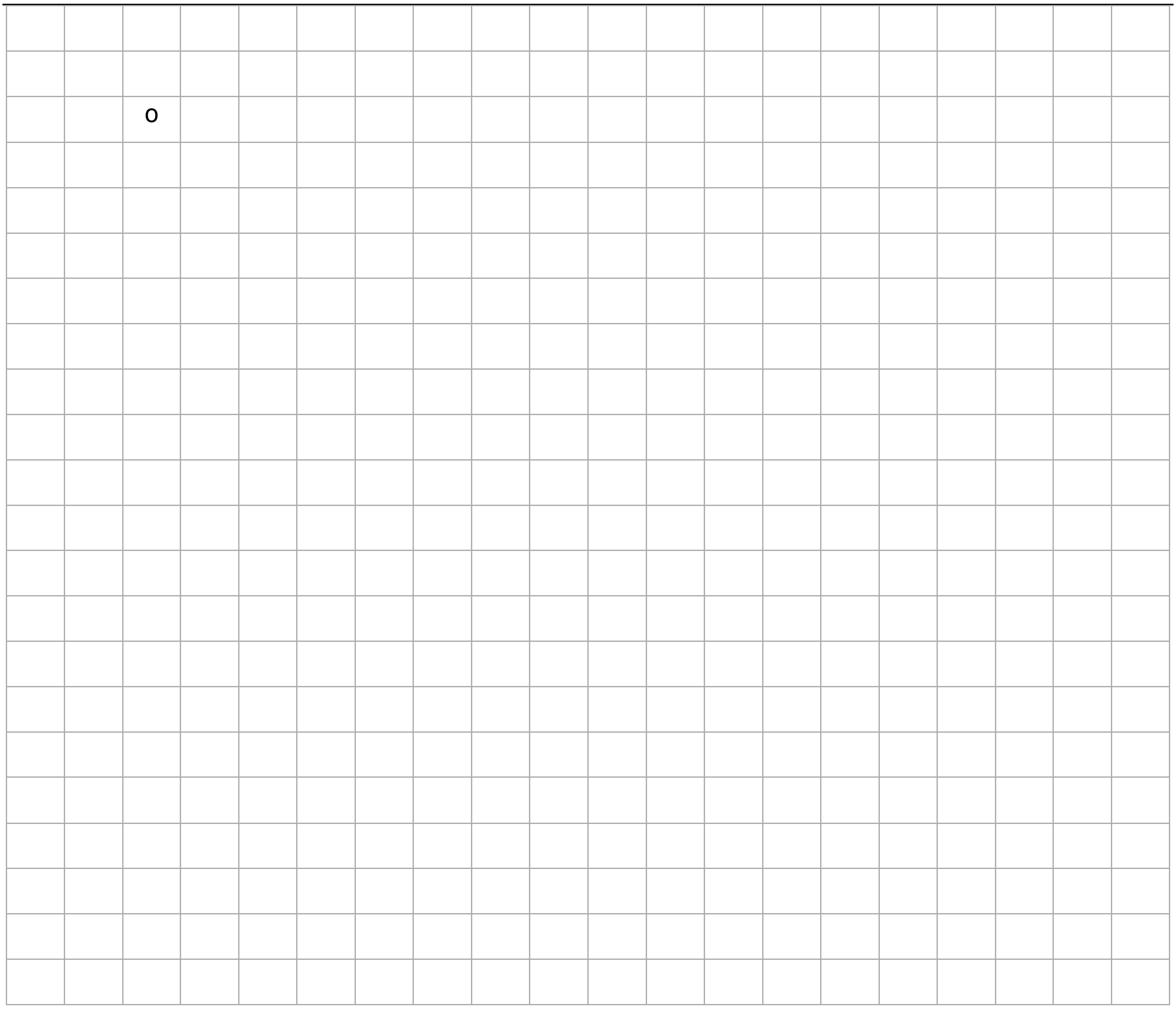
(Difficulté : *). Sur les pages suivantes, on représente un repère le plan xOy d'un espace à trois dimensions (x,y,z). x est l'horizontale et y la verticale. O est l'origine du repère.

Sur les pages suivantes, représentez le champ électrique transporté par les ondes planes proposées par l'exercice, en dessinant leur champ de vecteur associé (i.e. tracez, l'allure du vecteur champ électrique au niveau de nombreux points du repère). Représentez également le vecteur $\mathbf{k}$.

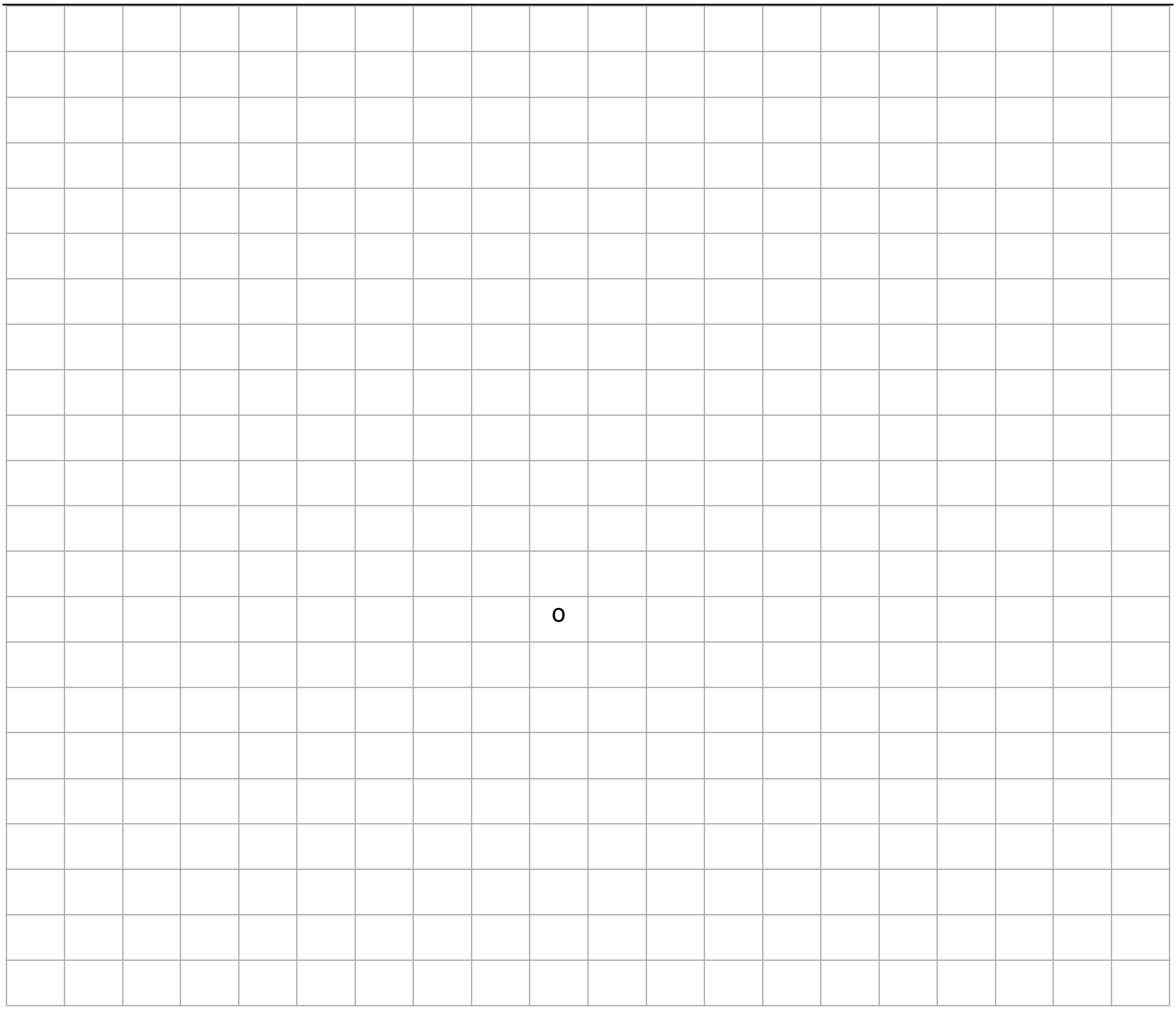
(a) $\mathbf{k}$ orienté selon le vecteur unitaire (0,1,0), polarisation linéaire selon **x**, longueur d'onde 4 carreaux. **Le plan de la feuille est le plan xOy.**



(b) **k** orienté selon le vecteur unitaire (1,0,0), polarisation linéaire selon **z**, longueur d'onde 6 carreaux. **Le plan de la feuille est le plan xOy.**



(c) **k** orienté selon le vecteur unitaire (0,0,1), polarisation linéaire selon **y**, longueur d'onde 3 carreaux. *(Attention, question piège).* **Le plan de la feuille est le plan xOy.**



3. Représentation des opérateurs

(Difficulté : **). On considère un champ de vitesse en coordonnées sphériques de la forme : $\boldsymbol{V}(r) = r\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varphi}}$

- Dessiner à la main l'allure du champ de vitesse dans le plan (x,y). A quel phénomène physique (autre qu'en électromagnétisme) vous fait penser un tel champ de vitesse ? A l'aide des expressions de ces opérateurs en coordonnées sphériques, calculez les expressions de **rot**(V) et **Div**(V).
- Faites de même pour le champ de vitesse : $\boldsymbol{V}(r) = \frac{1}{r}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{r}}$. Réfléchissez à une interprétation physique simple de ces deux opérateurs.
- Utiliser le code Matlab suivant pour tracer ces deux champs de vitesse et comparez avec vos dessins (profitez-en pour lire l'aide de Matlab sur la fonction *meshgrid*, elle est utile !)

```
%Champ V=r.u_phi
[X,Y] = meshgrid(-1:0.15:1,-1:0.15:1);
Vx = - Y;
Vy = X;
figure(), quiver(X,Y,Vx,Vy,'r');
grid ;
title('Champs du type V=r.u_{\phi}');
%Champ V=1/r.u_r
[X,Y] = meshgrid(-0.5:0.05:0.5,-0.5:0.05:0.5);
Vx = X./(X.^2+Y.^2);
Vy = Y./(X.^2+Y.^2);
figure(), quiver(X,Y,Vx,Vy,'b');
grid;
title('Champs du type V=1/r u_{r}');
```

3. Vecteur de Poynting et éclairement

(Difficulté : *). Cherchez sur Internet l'éclairement en $W.m^{-2}$ du Soleil sur Terre. Calculez, en utilisant l'expression du vecteur de Poynting *pour une onde plane* l'amplitude du champ électrique des ondes provenant du Soleil. Qu'est-ce qui justifie de modéliser ce champ par une onde plane ?

4. Équations de Maxwell

(Difficulté : *). Combien y a-t-il d'inconnues scalaires dans le système d'équations de Maxwell dans le vide, sans sources ? En remarquant que certaines équations sont vectorielles, combien d'équations scalaires forment les équations de Maxwell ?

En déduire que dans ce cas, il est toujours possible d'exprimer la solution uniquement en fonction de **E** (ou uniquement de **B**).

Feuille d'exercices

Chapitre 2

La lumière et le vecteur champ électrique. Interférences lumineuses

1. Vecteur champ électrique et polarisation

(Difficulté : *). On considère plusieurs ondes planes se propageant selon z. Quel est le plan de polarisation de l'onde ? Pour chacun des champs suivants, dessinez dans ce plan de polarisation la direction du champ électrique à t=0, ainsi que la trajectoire que le vecteur décrit au cours du temps. Indiquez le vecteur de Jones et nommez l'état de polarisation associé à chaque onde.

$$\boldsymbol{E_1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \\ -\frac{E_0}{2} \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \;;\; \boldsymbol{E_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \;;\; \boldsymbol{E_3}(t) = \boldsymbol{E_1}(t) + \boldsymbol{E_2}(t) \;;\; \boldsymbol{E_4}(t) = \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \\ -iE_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

2. Interférences en lumière polarisée

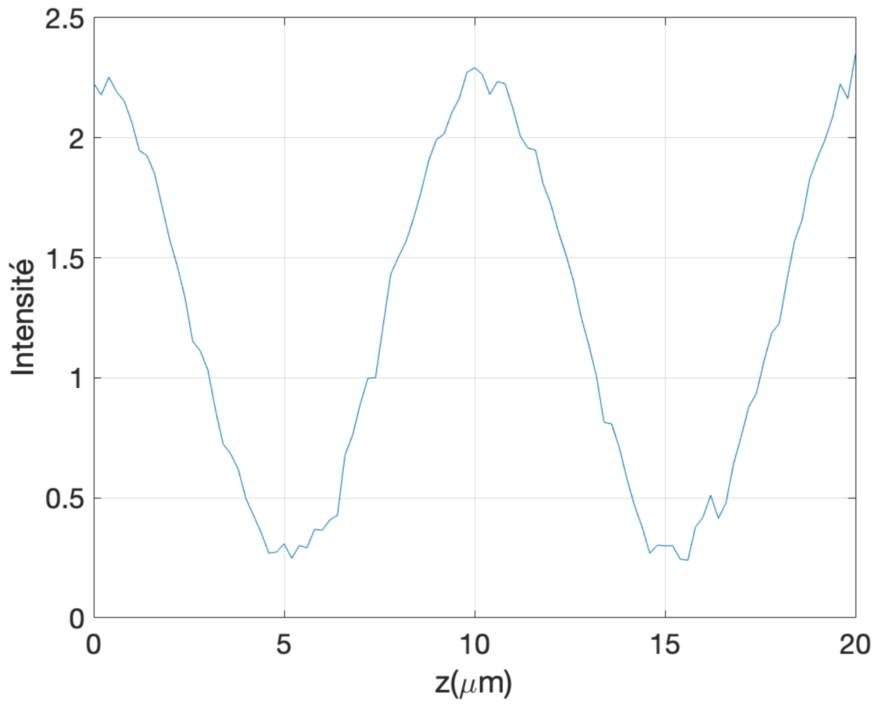
(Difficulté : *). (a) Écrivez une expression mathématique générale représentant le champ électrique transporté par une onde monochromatique se propageant selon z, et polarisée elliptiquement dans le plan (x,y) les axes x et y étant les axes de l'ellipse de polarisation. Introduisez vos propres notations.

(b) Écrivez l'intensité résultant de l'interférence de deux ondes de polarisations elliptiques *identiques* (dans le même plan (x,y)), se propageant toutes les deux suivant z, et de même longueur d'onde, les axes des ellipses étant portés par x et y. Quelle simplification pouvez-vous écrire dans le cas où la polarisation n'est pas seulement ellipitique mais circulaire ?

Démontrez que deux ondes de polarisations *circulaires et de sens contraires* n'interfèrent pas.

3. Analyse d'une figure d'interférences

(Difficulté : **). On considère une onde plane monochromatique à une longueur d'onde λ=500 nm, polarisée suivant x et se propageant suivant z. Son amplitude vaut E_1=1 en unité arbitraire. On fait interférer ce champ avec une seconde onde plane de même longueur d'onde et également polarisée suivant x, mais d'amplitude E_2 inconnue. Ce second champ se propage suivant une direction faisant un angle α<<1 par rapport à z. On s'intéresse uniquement à l'évolution du champ dans le plan xOz. On mesure expérimentalement suivant z, la figure d'interférence suivante :



- Faites un dessin. Écrivez l'expression vectorielle des champs $\mathbf{E_1}$(x,z) et $\mathbf{E_2}$(x,z) ainsi que des vecteurs de propagation $\mathbf{k_1}$ et $\mathbf{k_2}$
- Écrivez l'expression de l'intensité du champ résultant de l'interférence entre E_1 et E_2 (simplifier en utilisant le fait que l'angle entre les deux ondes est petit).
- En analysant la mesure ci-dessus, déterminez l'amplitude du champ E_2 et l'angle α utilisé dans cette expérience.
- De façon plus générale, comment serait modifié qualitativement cette figure d'interférence si l'amplitude d'un des deux champs était beaucoup plus faible que l'autre ? Reliez cela au fait que lorsque l'on utilise un interféromètre en optique, on dit que les bras doivent être 'équilibrés'.

Feuille d'exercices

Chapitre 3

Le régime monochromatique et l'équation de Helmholtz.

1. Indice optique

(Difficulté : **). Vous connaissez surement les indices de réfraction du verre ou de l'eau dans le visible. Ce sont des matériaux dit 'diélectriques'. La notion d'indice de réfraction existe aussi pour les métaux et dans ce cas, ces indices ont une partie *complexe* très importante. On va regarder ici l'influence de cette partie complexe sur ela réflexion et la transmission d'une onde électromagnétique incidente sur une couche d'or.

1. En allant sur le site \\refractive.index.nfo et en sélectionnant Au (gold) dans le menu 'Book' en haut la page, récupérer l'indice de l'or à 500 nm et 650 nm. Est-ce un nombre réel ?

2. La formule classique du coefficient de réflexion d'une interface entre deux milieux, en incidence normale :$R = \left|\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right|^2$ est aussi valable pour des indices complexes. Calculer le coefficient de réflexion d'une couche d'or à 500 nm et 650 nm. Comment les valeurs obtenues vous permettent-elles d'expliquer la couleur de l'or ?

3. Allez regarder et notez la solution de l'équation d'Helmholtz pour une onde se propageant dans un matériau d'indice n (eq. 3.17 et 3.18). On note n=n'+in'' (avec n' la partie réelle et n'' la partie imaginaire de l'indice). Montrez que dans un métal, l'amplitude d'une onde lumineuse diminue exponentiellement sur une longueur caractéristique de l'ordre de λ/Im(n). Calculer la valeur numérique de cette distance d'atténuation, appelée *épaisseur de peau* du métal. Une couche d'or peut-elle transmettre de la lumière ? Si oui, à quelle condition ?

4. Faites la même analyse pour du verre BK7.

2. Propagation en milieu biréfringent

(Difficulté : ∗). De façon très générale, les solutions de l'équation de Helmholtz pour les différentes composantes d'une onde plane monochromatique sont données par les équations 3.15. Un cas que vous verrez plus en détail dans le cours de *Polarisation*, est le cas de matériaux biréfringent, i.e. des matériaux qui ont un indice de réfraction qui dépend de la direction de polarisation de la lumière. La glace, par exemple est biréfringente.

On considère une onde plane incidente monochromatique à 600 nm polarisée linéairement à 45° dans le plan (xy) se propageant dans la glace suivant z. On prendra un indice de la glace égal à 1.309 pour une onde polarisée suivant x et égal à 1.313 pour une onde polarisée suivant y. Calculez au bout de quelle distance L la polarisation de la lumière est devenue circulaire.

3. Interféromètre de Fabry-Perot

(Difficulté : $**$). Un Fabry-Pérot est un type d'interféromètre constitué de deux miroirs très réfléchissants séparés de quelques mm ou cm. Ils sont typiquement utilisés pour faire de la spectroscopie à haute résolution ou pour réaliser une cavité laser.

On considère une onde plane monochromatique incidente sur le Fabry Pérot en x=0 (juste avant le premier miroir) : $\boldsymbol{E_{inc}} = \boldsymbol{E_0 e^{j\omega t}}$. Les deux miroirs ont un coefficient de réflexion en amplitude noté **r** et de transmission noté **t**. La distance entre les deux miroirs est notée **e**. L'onde est en incidence normale.

1. Écrivez l'expression du champ qui est transmis directement par les deux miroirs, sans aller-retour.
2. Faites de même pour le champ qui sort du Fabry-Pérot en transmission après avoir fait un seul et unique aller-retour dans la cavité.
3. Justifiez que le champ sortant du Fabry Pérot peut s'écrire :

$$E_{FP} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k t^2 E_0\, e^{j\omega t}$$, avec q un coefficient que vous définirez.

Quel principe avez-vous utilisé pour écrire cette somme ? Le calcul de l'intensité sortant du Fabry Pérot à partir de l'expression précédente n'est pas difficile, mais un peu pénible. On trouve finalement que :

$$I = \frac{I_0}{1+M.sin^2(\varphi)}$$, avec $M = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}$ et φ le déphasage dû à la propagation sur la distance e

4. Avec r=0.95 et une longueur d'onde de 532 nm, tracez sous Matlab l'intensité en sortie du Fabry-Pérot en fonction de l'épaisseur e. Montrez l'existence de *modes de cavité.*