

**Nom :**

**Prénom :**

## **Feuille d'exercices**

### Chapitre 9

#### Origine de l'indice optique

#### **1. Moments dipolaires et mécanique des électrons dans les milieux**

(Difficulté : \*). La réponse optique d'un matériau, celle que l'on perçoit à notre échelle, est le résultat de la diffusion de la lumière par les dipôles induits dans le matériau par une onde incidente. Les dipôles sont induits eux-mêmes parce que les charges d'un matériau, et notamment les électrons, sont mises en mouvement lorsqu'ils sont éclairés, c'est-à-dire soumis à un champ électromagnétique. Mis en mouvement, ils rayonnent.

Dans cet exercice, on montre brièvement que la différence entre les deux grands comportements optiques des matériaux (métaux réfléchissants ou diélectriques transparents) vient de la différence de nature des dipôles induits, et plus particulièrement de la différence de mouvement mécanique des électrons dans les différents matériaux.

##### Cas du métal

On souhaite modéliser la réponse optique d'un métal. Un métal est caractérisé par la présence de nombreux électrons de conduction, qui se déplacent sur de bien plus grandes distances que les électrons de valence. On modélise ainsi souvent un métal comme un « gaz d'électrons libres ». C'est le modèle de Drude.

1. Écrivez l'équation fondamentale du mouvement d'un électron soumis uniquement à la force de Lorentz du champ électrique. On considèrera le mouvement d'un électron selon l'axe  $x$  par exemple.
2. Résolvez cette équation en régime monochromatique, c'est-à-dire lorsqu'on éclaire l'électron par une onde électromagnétique monochromatique d'amplitude  $E_{inc}(\omega)$  – ce qui correspond à placer le système en régime sinusoïdal forcé. Comment s'écrit l'amplitude  $x(\omega)$  du mouvement de l'électron en fonction de la fréquence ? Comment s'écrit le moment dipolaire induit  $p(\omega)$  en fonction de la fréquence ?
3. Tracez le diagramme de la réponse en fréquence de ce système, c'est-à-dire deux graphes, correspondant au module et à la phase de la quantité  $p(\omega)/E_{inc}(\omega)$ .

---

---

---



### Cas d'un diélectrique

On souhaite modéliser la réponse optique d'un diélectrique. Un diélectrique est caractérisé par la présence de charges liées (les électrons de valence) et de peu de charges libres. Les charges liées sont rappelées en permanence à proximité des atomes du matériau par les interactions électrostatiques. Un des modèles les plus simples pour tenir compte de cette force est le modèle de l'électron élastiquement lié : on considère que les électrons subissent en permanence une force de rappel élastique qui contraint leur mouvement.

4. Écrivez l'équation fondamentale du mouvement d'un électron soumis à la force de Lorentz du champ électrique et à une force de rappel élastique selon la même direction  $x$ , de fréquence caractéristique  $\omega_0$ , ainsi qu'une force de frottement fluide de coefficient  $\gamma$ .
5. Comme dans la partie précédente, résolvez pour trouver  $x(\omega)$  et  $p(\omega)$ .
6. Tracez le diagramme de Bode de la réponse en fréquence de ce système, en amplitude et en phase, en considérant  $\gamma \ll \omega_0$ . Dans ce modèle, on considèrera que la fréquence à laquelle on utilise un matériau diélectrique correspond à  $\omega > \omega_0$ .

Lien entre phase du rayonnement et comportement optique.

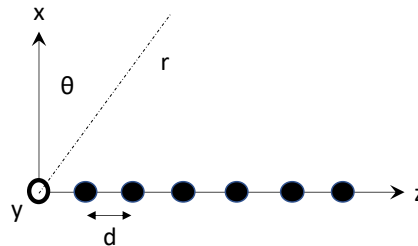
7. Rappelez l'expression qui relie le champ rayonné (diffusé)  $E_{diff}(\omega)$  par un dipôle au moment dipolaire de même dipôle  $p(\omega)$ , et donc à  $E_{inc}(\omega)$ .
8. Quel est dans les deux cas (diélectrique ou métal) la phase relative entre  $E_{inc}(\omega)$  et  $E_{diff}(\omega)$  ? Sachant que le champ transmis est la superposition du champ incident et du champ diffusé, utilisez un raisonnement d'interférences pour expliquer de manière qualitative le comportement optique d'un métal et d'un diélectrique à différentes fréquences.

[illegible]



## 2. Assemblée de dipôles rayonnants : interaction d'une onde avec une interface

(Difficulté : \*\*). Dans les cours précédents, vous avez vu comment calculer le rayonnement d'un fil ou d'une antenne plate en intégrant les courants sur toute la surface d'émission. Nous avons également vu le modèle d'émission d'un objet ponctuel : un dipôle. Un sujet de recherche très actuel est de se demander ce qu'il est possible de faire si l'on dispose des émetteurs ponctuels en réseau sur une surface. On va étudier dans cet exercice le cas le plus simple : un réseau 1D de dipôles.



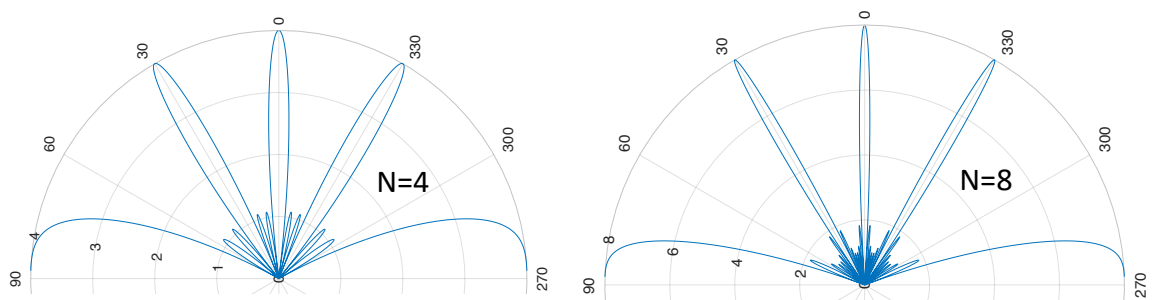
On considère  $N$  dipôles  $\mathbf{p}_0$ , tous orientés suivant  $y$ , et placés le long de l'axe  $z$ , avec une période  $d$ . On observe le champ rayonné dans le plan  $xz$ , en champ lointain, dans la direction  $\theta$ .

1. On note  $A_0(r)$  le potentiel rayonné par un dipôle placé à l'origine  $0$  du repère. Écrivez, sous forme d'une somme, le potentiel monochromatique  $A(r, \omega)$  rayonné par l'ensemble des dipôles.
2. Montrez que le potentiel rayonné peut s'écrire :

$$A(r, \omega) = A_0(r) e^{i\psi} \frac{\sin\left(\frac{Nd}{2} \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta\right)\right)}{\sin\left(\frac{d}{2} \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta\right)\right)}$$

Quel résultat du cours d'optique physique est analogue à celui-ci ?

3. On a tracé ci-dessous la norme du potentiel rayonné, en coordonnées polaires, pour une période  $d = 2\lambda$  et un nombre de dipôles  $N=4$  et  $N=8$ . Interprétez les similitudes et les différences entre ces deux diagrammes de rayonnement.



4. En plus du nombre de dipôles et de la période, sur quels autres paramètres pourrait-on jouer pour sculpter le diagramme de rayonnement ?
5. On imagine désormais que les dipôles sont induits par une onde monochromatique plane incidente se propageant selon un angle  $\theta_i$  avec la direction  $Ox$  et selon les  $z$  positifs. Écrivez la forme du champ de l'onde incidente. Sachant que le réseau de dipôles est dans le plan

$x=0$ , que pouvez-vous dire de la phase relative de deux dipôles induits consécutifs sur l'axe  $Ox$  ?

6. Montrez que le diagramme de rayonnement est désormais centré sur une direction  $\theta_r$  dont on donnera l'expression en fonction de  $\theta_i$ . Que se passe-t-il lorsque la distance  $d$  devient très inférieure à la longueur d'onde ? Et que le nombre  $N$  devient très grand ? Quelle situation physique est modélisée ici ?

[illegible]



